Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 09.11.2006, 10.15h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 3

Aufgabe 1 Ab in die Röhre

Betrachten Sie bitte beim Bearbeiten dieser Aufgabe den Anhang zu diesem Übungsblatt!
Die Computertomographie als medizinische Routinebildtechnik konnte erst entwickelt werden, als kleine leistungsstarke Computer mit der Möglichkeit zum Verarbeiten großer Datenmengen zur Verfügung standen. Dies liegt daran, dass ein Computertomograph zur Anfertigung eines Bildes erst einmal sehr viele Messwerte speichern muß. Zur Berechnung der Grauwerte aller Bildpunkte muss dann mithilfe der Messwerte ein riesiges lineares Gleichungssystem aufgestellt und gelöst werden. Jedes CT-Bild besteht aus Tausenden von Quadrätchen, die in unterschiedlichen Grautönen gefärbt sind. Der Grauton gibt an, wie stark ein Strahl an der entsprechenden Stelle im Körper abgeschwächt wird. Wenn er stark abgeschwächt wird, so erscheint das Quadrat hell; wird er nicht oder nur wenig abgeschwächt, so ist das Quadrat dunkel. Weil verschiedene Gewebearten Strahlen unterschiedlich stark abschwächen, ergeben sich Helligkeitsunterschiede.
Wie kommt man auf das LGS? Eine Strahlenquelle sendet (Röntgen-) Strahlen aus. Diese durchdringen die gewählte Körperschicht und treten wieder aus dem Körper aus. Nun treffen die Strahlen auf einen Empfänger, der misst, wie stark diese jetzt noch sind. Es müssen noch mehr Messungen gemacht werden, deshalb wird die Strahlenquelle in kleinen Schritten gedreht und jedesmal wird der Messvorgang wiederholt. So kommt man schließlich zu einer großen Anzahl von Messungen. Wir möchten das Prinzip an einem einfachen Modell erklären. Hierzu unterteilen wir die betrachtete Schicht zwichen Strahlenquelle und -empfänger in neun Quadrate und zeichnen einen Strahl ein, siehe Abbildung 1. Nehmen wir an, dass der Strahl beim Verlassen der Quelle eine Stärke von 20 Einheiten hat. Er durchquert die Quadrate $1, 2$ und 3. Beim Durchgang durch das erste Quadrat wird er um einen gewissen Betrag abgeschwächt, sagen wir um x_1 Einheiten. Im zweiten Quadrat wird er weiter um x_2 Einheiten abgeschwächt und im dritten nochmals um x_3 Einheiten. Die gemessene Stärke, die der Strahl beim Austreten aus der Schicht noch hat, betrage 2 Einheiten. Wir können diese Abschwächung mit einer Gleichung beschreiben: $20 - x_1 - x_2 - x_3 = 2$.
Stellen Sie das LGS auf, das sich aus den Messungen ergibt, die in den Abbildungen 2-4 dargestellt sind und berechnen Sie, um wieviele Einheiten die neun Quadrate jeweils den Strahl abschwächen!

Aufgabe 2 Wer knackt den Code?

Dagobert merkt sich den vierstelligen Code $x_1x_2x_3x_4 \in \{0000, 0001, \ldots, 9999\}$ zum Öffnen seines Geldkoffers über folgendes Zahlenrätsel:

a) Die Quersumme der dargestellten Zahl ist 10.

b) Die dritte Ziffer ist die Summe der anderen Ziffern.

c) Vertauscht man die dritte und die vierte Ziffer, so vermindert sich die Zahl um 36.

Stellen Sie zur Lösung des Rätsels ein LGS auf und bestimmen Sie zunächst die allgemeine Lösung dieses Systems über $\mathbb{Q}$.
Wieviele und welche Versuche muß Dagobert höchstens machen, bis sich der Koffer öffnen läßt?

Aufgabe 3 Fortsetzung der Aufgabe "Secret Sharing"

c) Eine weitere Frau wird in den Vorstand gewählt. Der Vorsitzende will ihr einen Punkt G zuweisen, der den gleichen Abstand von der Geheimnisebene hat wie F, so dass es egal ist, welche der beiden Frauen bei der Tresoröffnung dabei ist. Schlagen Sie einen geeigneten Punkt G vor!

d) Der Vorsizende ändert sein secret sharing so, dass immer mindestens 2 Männer und beide Frauen bei der Tresoröffnung anwesend sein müssen, in dem er den Männern $H(2 \mid 1 \mid -1)$, $I(4 \mid 1 \mid 0)$, $J(6 \mid 1 \mid 1)$, $K(8 \mid 1 \mid 2)$ und $L(10 \mid 1 \mid 3)$ und den Frauen $M(-2 \mid 0 \mid 3)$ und $N(0 \mid 2 \mid -3)$ zuweist. Die Herrenpunkte liegen auf einer ersten Geheimnisgeraden, die Damenpunkte auf der zweiten. Bestimmen Sie für den Code die drei ersten Ziffern des Abstandes der beiden Geraden!

Aufabe 4 Beweisen ist ... quadratisch, praktisch, gut!

Wie in der Vorlesung werde in der Zeichenebene ein geeignetes Koordinatensystem eingeführt. Beweisen Sie folgende Sätze, in dem Sie den Punkten Koordinatenpaare und den Geraden lineare Gleichungen zuordnen:

a) Satz des Thales: Liegen die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis, dass eine Seite Durchmesser ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

b) Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

Aufgabe 5 Gauß wird durch den Kakao gezogen

Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe von CoCoA:

a)

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} - x_4 + x_5 &= 5\\
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \phantom{{}+x_5} &= 3\\
-x_2 + 2x_3 - x_4 \phantom{{}+x_5} &= 1\\
2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 2\\
-x_1 + 2x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} - x_5 &= -14
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 - x_4 + 4x_5 &= 2\\
2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 5\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 + x_5 &= 1\\
3x_1 - 3x_2 + x_3 - 18x_4 + 9x_5 &= 8
\end{aligned}$$

Tipp: Verwenden Sie den folgenden Grundring: `Use S::= Q[x[1..5]];`