

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium WS 2006/07 Übungsblatt 5

Aufgabe 1 Sag mir Deine Teilmengen und ich sag Dir, wer Du bist!

Sei M eine Menge. Betrachten Sie auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ als Addition die symmetrische Differenz, also $+$: $\mathfrak{P}(M) \times \mathfrak{P}(M) \rightarrow \mathfrak{P}(M)$, $(X, Y) \mapsto X \Delta Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

- a) Definieren Sie eine skalare Multiplikation mit Elementen aus \mathbb{F}_2 , so dass $V := \mathfrak{P}(M)$ zu einem \mathbb{F}_2 -Vektorraum wird und weisen Sie die Vektorraumaxiome nach.

Sei im Folgenden M eine endliche Menge.

- b) Geben Sie eine \mathbb{F}_2 -Basis von V an! Welche Dimension hat V ?
Gibt es eine \mathbb{F}_2 -Basis von V , deren Elemente Teilmengen von M sind, die mindestens zwei Elemente besitzen?
- c) Sei W die Menge aller Teilmengen von M , die eine gerade Anzahl von Elementen besitzen. Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum von V ist!
- d) Sei X eine Teilmenge von M ungerader Kardinalität. Zeigen Sie, dass W zusammen mit X bereits ganz V erzeugt!

Aufgabe 2 Geiz ist geil

Jede der vier Investmentgesellschaften G_1, G_2, G_3, G_4 verkauft Anteilscheine. Mit dem Erwerb eines Anteilscheines wird der Käufer Miteigentümer der fünf Industriebetriebe A, B, C, D, E . Der Nennwert eines Anteilschein ist 100 €. Der mit einem Anteilschein erworbene Gesamtbesitz teilt sich bei den einzelnen Gesellschaften folgendermaßen auf:

	G_1	G_2	G_3	G_4
A	20	40	10	20
B	30	10	10	18
C	10	10	15	12
D	25	20	40	30
E	15	20	25	20

Beurteilen Sie das Angebot von G_4 , wenn sich der Verkaufspreis eines Anteilscheines in € nach folgender Tabelle bestimmt!

G_1	G_2	G_3	G_4
122	125	125	124,50

Aufgabe 3 Sieben Fässer Wein können uns nicht gefährlich sein

Eine Winzergenossenschaft versendet ihren Wein nur in Kisten K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 mit folgender Zusammensetzung (Angaben in Flaschen):

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
Tafelwein	156	168	48	36	36
Qualitätswein	120	132	36	24	36
Prädikatswein	72	84	24	12	24

Zeigen Sie, dass man jede Bestellung aus Kisten K_1, K_2, K_3 durch eine flaschenmäßig gleichwertige Lieferung aus Kisten K_3, K_4, K_5 ersetzen kann! Stellen Sie entsprechende Umrechnungsformeln auf!

Aufgabe 4 LU2LU

Es sei V ein K -Vektorraum. Weiter seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie:

- a) Für $a_1, \dots, a_n \in K \setminus \{0\}$ sind $a_1\vec{v}_1, \dots, a_n\vec{v}_n$ wieder linear unabhängig.
- b) Sei $\vec{w} := b_1\vec{v}_1 + \dots + b_i\vec{v}_i + \dots + b_n\vec{v}_n$ mit $b_1, \dots, b_n \in K$.
Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{i-1}, \vec{w}, \vec{v}_{i+1}, \dots, \vec{v}_n$ genau dann linear unabhängig sind, wenn $b_i \neq 0$ gilt.

Aufgabe 5 Relaxen am Cocoa Beach

Untersuchen Sie mit Hilfe von CoCoA die folgenden Vektoren des \mathbb{R}^3 auf lineare Abhängigkeit:

- a) $(1, -2, 1), (2, 1, -1), (7, -4, 1)$
- b) $(1, -3, 7), (2, 0, -6), (3, -1, -1), (2, 4, -5)$
- c) $(1, 2, -3), (1, -3, 2), (2, -1, 5)$
- d) $(-1, -1, -1), (0, 0, 0), (1, 1, 1)$