Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 30.11.2006, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 6

Aufgabe 1 Was ergibt das Produkt $(\mathbf{x}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{b})\cdots(\mathbf{x}-\mathbf{z})$?

Seien V und W zwei K-Vektorräume. Das direkte Produkt $V\times W$ wird durch die Verknüpfungen

$$(v,w)+(v',w'):=(v+v',w+w'),\ \lambda\cdot(v,w):=(\lambda v,\lambda w),\quad v,v'\in V,w,w'\in W,\lambda\in K$$

zu einem K-Vektorraum.

Zeigen Sie: Ist $v_1,\ldots,v_n$ eine Basis des Vektorraums V und $w_1,\ldots,w_m$ eine Basis des Vektorraums W, so bilden $(v_1,0),\ldots,(v_n,0),(0,w_1),\ldots,(0,w_m)$ eine Basis von $V\times W$!

Insbesondere gilt also $\dim V\times W=\dim V+\dim W$.

Aufgabe 2 Basen aller Räume vereinigt euch!

Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $U_1,U_2\subsetneq V$ zwei Unterräume von V mit $U_1\oplus U_2=V$. Weiter sei $v_1,\ldots,v_m$ eine Basis von U_1 und $w_1,\ldots,w_k$ eine Basis von U_2.

Zeigen Sie, dass $v_1,\ldots,v_m,w_1,\ldots,w_k$ eine Basis von V ist!

Aufabe 3 „Wie kann man eine Projektion verlängern?“ „Mit Viagra!“

Sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt und sei G eine Gerade in $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt, die nicht in E enthalten ist.

a) Beweisen Sie: $\mathbb{R}^3=E\oplus G$

b) Wir definieren zwei Abbildungen $p_1:\mathbb{R}^3\to E$ und $p_2:\mathbb{R}^3\to G$ wie folgt. Ist $v\in\mathbb{R}^3$ gegeben, so schreibe $v=v_1+v_2$ mit $v_1\in E$ und $v_2\in G$ und setze $p_1(v)=v_1$ sowie $p_2(v)=v_2$.
Zeigen Sie, dass p_1 und p_2 zwei $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind!

c) Erklären Sie die geometrische Wirkung von p_1 und p_2! Wie kann man das Bild eines Punktes konstruieren?
Tipp: Die Abbildungen p_1 und p_2 heißen auch Projektionen.

Aufgabe 4 “Das also war des Pudels Kern! Ein fahrender Skolast?“

Gegeben seien die linearen Abbildungen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4,\ f(x,y,z)=(x-y,x+y+z,2x+z,y-x)$ und $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ g(x,y,z)=(x-2y+z,0,2y-x-z)$. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern(f) und Bild(f) sowie auch von Kern(g) und Bild(g)!

Aufgabe 5 COCOA = Care of China’s Orphaned and Abandoned

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von CoCoA eine Basis des von $(1,-2,1)$, $(4,3,1)$, $(5,2,3)$ erzeugten $\mathbb{Q}$-Untervektorraums von $\mathbb{Q}^3$!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von CoCoA eine Basis des von $(-1,2,-4,1)$, $(2,1,1,-1)$, $(1,2,-2,2)$ erzeugten $\mathbb{Q}$-Untervektorraums von $\mathbb{Q}^4$!

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von CoCoA eine Basis des von $(\overline{1},\overline{2},\overline{2})$, $(\overline{1},\overline{1},\overline{2})$, $(\overline{2},\overline{0},\overline{1})$, $(\overline{1},\overline{0},\overline{2})$ erzeugten $\mathbb{F}_3$-Untervektorraums von $(\mathbb{F}_3)^3$!

Tipp: Verwenden Sie `Vector` und `Interreduced`, um eine Basis eines von einer Liste von Vektoren erzeugten Untervektorraums zu berechnen.