Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 07.12.2006, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

WS 2006/07 Übungsblatt 7

Aufgabe 1 Die Mathematik folgt dem Pfad der maximalen Ironie!
Sei K ein Körper, seien V, W zwei endlich dimensionale K-Vektorräume, sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung und sei $U \subseteq W$ ein K-Untervektorraum. Beweisen Sie

$$\dim_K f^{-1}(U) = \dim_K(U \cap \mathrm{Bild}(f)) + \dim_K(\mathrm{Kern}(f))\,!$$

Aufgabe 2 Im Bild: F. Kern auf Rang 2!
Sei K ein Körper, sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$

b) $f^2 = 0$ und $\dim_K(V) = 2 \cdot \mathrm{Rang}(f)$, dabei sei $\mathrm{Rang}(f) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f))$.

Aufabe 3 Auf Circes Spuren – Wie aus Menschen ... und aus ... Elefanten werden!
Nachrichten können beispielsweise verschlüsselt übermittelt werden, in dem sie spaltenweise in eine dreizeilige Matrix (Spaltenzahl nach Textlänge) geschrieben werden, wobei jeder Buchstabe durch seine Ordnungszahl im Alphabet dargestellt wird. Diese „Textmatrix“ wird dann von links mit einer Kodierungsmatix multipliziert und das Ergebnis, die Codematrix, übersandt.
Rechnet man in $\mathbb{F}_{29}$ kann man erreichen, dass die Codematrix wieder ein Wort, ein Tarnwort, darstellt, also die Verschlüsselung nicht so leicht erkennbar ist. ($\overline{0}$ steht fürs Leerzeichen - , $\overline{27}$ steht fürs Komma und $\overline{28}$ steht für den Punkt.)

a) Der Zugang zu der Internetseite zur Vorlesung Lineare Algebra und Analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium soll in Zukunft nur noch den Teilnehmern der Vorlesung gewährt sein. Das Passwort wird diesen verschlüsselt per Mail geschickt. Das Passwort MENSCHEN- wird mit Hilfe der Kodierungsmatrix

$$K_1 = \begin{pmatrix} 21 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & 20 \\ 15 & 5 & 18 \end{pmatrix}$$

kodiert. Welches Codewort bekommen Sie geschickt?

b) Nach ein paar Wochen wird das Passwort geändert. Die Kodierungsmatrix ist

$$K_2 = \begin{pmatrix} 26 & 2 & 25 \\ 4 & 4 & 24 \\ 0 & 9 & 24 \end{pmatrix}$$

und das Codewort, das die Codematrix darstellt, ist -ELEFANT-. Mit welchem Passwort können Sie sich einloggen?

c) Bestimmen Sie eine Kodierungsmatrix, die MIGRAENE- in MAIREGEN- verwandelt!

d) Bestimmen Sie 3 dreibuchstabige Fixwörter, die bei der Kodierung mit

$$K_3 = \begin{pmatrix} 3 & 16 & 19 \\ 23 & 13 & 28 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gleich bleiben! (Diese Fixwörter müssen keinen Sinn ergeben!)

e) Stellen Sie <u>eine</u> Gleichung für die Kodierungsmatrix K_4 auf, die NESTER in STERNE verwandelt und UNI als Fixwort besitzt! (K_4 soll nicht ausgerechnet werden!)

Aufgabe 4 Much Ado About Nothing

Zeigen Sie, dass sich der Zeilenraum einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen nicht ändert!

Aufgabe 5 The Matrix has you

a) Berechnen Sie mit Hilfe von CoCoA alle definierten Matrizenprodukte $M_i \cdot M_j,\ i, j \in \{1, 2, 3\}$ der folgenden Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 5 & 12 & 20 \\ 11 & 25 & 33 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 22 \\ 13 & 19 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 9 & 3 & 21 \end{pmatrix}!$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe von CoCoA das Matrizenprodukt von

$$M_4 = \begin{pmatrix} 22 & 28 & 16 & 5 \\ 9 & 17 & 30 & 4 \\ 34 & 1 & 22 & 15 \\ 24 & 11 & 3 & 14 \end{pmatrix} \quad M_5 = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 35 & 2 \\ 0 & 36 \\ 25 & 20 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{F}_{37}$!

Tipp: Verwenden Sie hierfür den Befehl `BringIn`.