Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 21.12.2006, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium
WS 2006/07 Übungsblatt 9

Aufgabe 1 Ich bin schon ganz Mat!
Gegeben seien zwei Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{3,2}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{2,3}(\mathbb{R})$. Für die zu $A \cdot B$ gehörige lineare Abbildung f_{AB} soll gelten:

1) $f_{AB}(e_1), f_{AB}(e_2), f_{AB}(e_3)$ sind linear unabhängig,
2) $f_{AB}(e_1), f_{AB}(e_2), f_{AB}(e_3)$ sind linear abhängig,
3) $f_{AB}(e_1), f_{AB}(e_2), f_{AB}(e_3)$ sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

   a) Finden Sie für jede Bedingung ein Beispiel für A und B oder beweisen Sie, dass die Bedingung nicht erfüllbar ist!
   b) Untersuchen Sie die entsprechenden Fragen für die Abbildung f_{BA}!

Aufgabe 2 Laber, laber, ...
Erklären Sie mit eigenen Worten die Begriffe Basis und Dimension eines Vektorraums, lineare Abbildung, ihr Kern und Bild, Matrix, ihr Rang und gegebenenfalls weitere relevante Begriffe!
Erklären Sie außerdem die Ihnen bekannten Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen!

Aufabe 3 Basis wechsel dich jetzt wirklich!
Gegeben sei die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & -12 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen B, C des $\mathbb{R}^3$, so dass

$$M_C^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt!

Bestimmen Sie außerdem invertierbare Matrizen S, T mit $SAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 4 Feste Beziehungen sind zum Glück nicht transitiv!

a) Untersuchen Sie, ob folgende Relationen auf $\mathbb{Z}$ reflexiv, transitiv oder symmetrisch sind:
   1) $x \sim y :\Leftrightarrow x \leq 3y$
   2) $x \sim y :\Leftrightarrow x - y = 2$
   3) $x \sim y :\Leftrightarrow |x - y| \leq 3$

b) Eine Relation R heißt euklidisch, wenn aus $(u, v) \in R$ und $(u, w) \in R$ folgt, dass $(v, w) \in R$ gilt. Zeigen Sie, dass eine reflexive Relation R genau dann eine Äquivalenzrelation ist, wenn sie euklidisch ist!

Aufgabe 5 The future will not be user friendly

Verwenden Sie CoCoA , um

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$$

in Zeilenstufenform zu bringen!

Für welche x, y, z ist M nicht invertierbar?

Tipp: Verwenden Sie gegebenenfalls den Befehl `Factor(F)`, um ein Polynom in Faktoren zu zerlegen!