Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 11.01.2007, 10.15 h

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium
WS 2006/07 Übungsblatt 10

Aufgabe 1 S_6 ist keine 6-Gruppe!

a) Vervollständigen Sie die Gruppentafel der Diedergruppe D_4!

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen der S_3 und der D_4!

Aufgabe 2 Was ist nahrhaft und kommutiert? Eine abelsche Suppe!
Sei G eine Gruppe. Die Menge $Z(G) := \{x \in G \,|\, ax = xa \text{ für alle } a \in G\}$ heißt das **Zentrum** von G. Zeigen Sie:

a) $Z(G)$ ist eine Untergruppe von G.

b) G ist genau dann abelsch, wenn $G = Z(G)$ gilt.

Aufabe 3 Man kann alles einführen ... es ist nur fraglich, ob es sinnvoll ist!
Zeigen Sie, dass $G := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ mit der durch $a * b := a + b + ab$ definierten Operation eine abelsche Gruppe ist! Lösen Sie in G die Gleichung $5 * x * 6 = 17$!

Aufgabe 4 Der Student muss es wissen! Der Assistent muss wissen, wo es steht! Der Professor muss wissen, wo der Assistent ist!
Sei G eine Gruppe , $M \subseteq G$ eine Menge und $U \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

a) $U = \langle M \rangle$

b) U ist der Durchschnitt aller Untergruppen von G, die M enthalten.

c) U ist das eindeutig bestimmte minimale Element (bzgl. Inklusion) der Menge aller Untergruppen von G, die M enthalten.

Aufgabe 5 RSA = Rinderzuchtverband Sachsen Anhalt
In dieser Aufgabe werden wie gehabt den Buchstaben A bis Z die Zahlen 1 bis 26 zugeordnet und Nachrichten buchstabenweise mit dem RSA-Verfahren verschlüsselt!

a) Wählen Sie sich einen öffentlichen Schlüssel (und geben Sie ihn an)! Verschlüsseln Sie mit Hilfe von CoCoA ihren Namen!

b) Ihr öffentlicher Schlüssel sei (3337,79) und die dazu gehörigen Primzahlen seien $p = 47$ und $q = 71$. Welche Nachricht bekommen Sie von uns geschickt?
2086 2562 2616 2807 0270 1265
2086 0270 1265 0116

⋆ Aufgabe 6 ⋆ Betrachten Sie die Menge aller Mengen, die noch nie betrachtet wurden!
Seien M, N zwei Mengen und sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Zeigen Sie, dass für $M_1, M_2 \subseteq M$ gilt:

i) $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$
Finden Sie ein Beispiel, in dem $f(M_1 \cap M_2) \neq f(M_1) \cap f(M_2)$ gilt!

ii) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

b) Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äquivalent sind:

i) f ist injektiv.

ii) Für $M_1, M_2 \subseteq M$ gilt $f(M_1 \cap M_2) = f(M_1) \cap f(M_2)$.

$\star$ Aufgabe 7 $\star$ Ich bin nicht mit Dir auf einer Ebene!

Für eine Konstruktionsskizze soll senkrecht zu den zwei Ebenen mit den Gleichungen $x + 2y + z = 2$ und $2x + y - z = 3$ die Grundfläche einer rechteckigen Platte mit einem Eckpunkt $P = (2, 1, -1)$ gezeichnet werden.

a) Ermitteln Sie für die Ebene E, in der die Grundfläche der Platte liegt, die Hessesche Normalform und eine Parameterdarstellung!

b) Wenn zwei Kanten der Grundfläche der Platte parallel zur xy-Ebene verlaufen, welche Richtung haben dann die beiden anderen Kanten?

$\star$ Aufgabe 8 $\star$ So ein Endomorfiesmus!

Sei K ein Körper , V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Für $n \geq 1$ setzen wir $f^n := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{mal}}$. Es gebe ein $n \geq 1$ und einen Vektor $v \in V$ mit $f^n(v) \neq 0$ und $f^{n+1}(v) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $v, f(v), \ldots, f^n(v)$ K-linear unabhängig sind!

$\star$ Aufgabe 9 $\star$ Gibt's nicht, gibt's nicht!

Es seien $v = (1, 2, 1, -2)$, $w = (-1, 0, 1, 3)$ und $U := \langle (1, 3, -1) \rangle$.

a) Gibt es eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ mit $\text{Kern}(F) = U$ und $\text{Bild}(F) = \langle v, w \rangle$?

b) Wenn ja, ist F eindeutig bestimmt?

$\star$ Aufgabe 10 $\star$ Es gibt drei Arten von Menschen: die, die zählen können und die, die nicht zählen können!

Sei V ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis $A = (v_1, \ldots, v_4)$ und W ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis $B = (w_1, \ldots, w_5)$. Sei $F : V \to W$ die lineare Abbildung, die gegeben ist durch

$$M_B^A(F) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 7 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & -17 & 5 \end{pmatrix}.$$

Schließlich seien $A' = (v_1', \ldots, v_4')$ mit $v_1' = v_1 + v_2$, $v_2' = v_2 + v_3$, $v_3' = v_3 + v_4$, $v_4' = v_4$ und $B' = (w_1', \ldots, w_5')$ mit $w_1' = w_1$, $w_2' = w_1 + w_2$, $w_3' = -w_1 + w_3$, $w_4' = w_1 + w_4$, $w_5' = w_1 + w_5$.

a) Zeigen Sie, dass A' eine Basis von V und B' eine Basis von W ist!

b) Berechnen Sie $M_B^{A'}(F)$, $M_{B'}^A(F)$ und $M_{B'}^{A'}(F)$!

c) Bestimmen Sie $F^{-1}(\langle w_1, w_2, w_3 \rangle)$!

Die Aufgaben 6 bis 10 sind Bonusaufgaben, mit denen bei richtiger Bearbeitung Zusatzpunkte erreicht werden können. Außerdem dienen Sie zur Wiederholung des behandelten Stoffes!

Wir wünschen Ihnen fröhliche Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!