

Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium WS 2006/07 Übungsblatt 11

Aufgabe 1 „Permute-O-Man?“ „Yes, I bring with me the power of permutation!“

Sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$ gegeben.

- Bestimmen Sie σ^{-1} und σ^{99} !
- Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen!
- Schreiben Sie σ als Produkt von Nachbartranspositionen!
- Wieviele Fehlstände besitzt σ ?
 - Ist σ gerade oder ungerade?

Aufgabe 2 Gruppenhomomorphismus: die irrationale Angst davor, sich in ein Groupie zu verwandeln

Es seien (G, \circ) und $(H, *)$ Gruppen.

- Es seien $\Phi, \Psi : G \rightarrow H$ zwei Gruppenhomomorphismen. Zeigen Sie, dass

$$U := \{g \in G \mid \Phi(g) = \Psi(g)\}$$

eine Untergruppe von G ist!

- Es sei $G = H = S_3$. Finden Sie einen Homomorphismus $\Phi : S_3 \rightarrow S_3$, für den die Untergruppe

$$\{g \in S_3 \mid \Phi(g) = g\}$$

genau zwei Elemente enthält!

Aufgabe 3 Das Leben ist endlich, das Faktenwissen ist unendlich!

Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist!

Aufgabe 4 Hab' Erdöl im Garten, ob's stürmt oder schneit, und mit dem Ersparten üb' Treu und Redlichkeit!

Ein russisches Erdölfeld ist 144km breit. Das Explorationsteam einer deutschen Ölfirma weiß aus theoretischen Modellen, dass die Dicke vom Rand bis zur dicksten Stelle monoton zunimmt und dann wieder monoton abnimmt. Es soll die dickste Stelle mit möglichst wenigen Bohrungen bis auf 1km genau finden. Wie ist dabei vorzugehen?

Tipp: $55 + 89 = 144$

Aufgabe 5 Alle Körper weisen Spuren der Einheit auf, erreichen sie aber nicht!

Bestimmen Sie mit CoCoA alle Einheiten von $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$, in dem Sie mit Hilfe einer Schleifenanweisung eine Liste aller Einheiten erzeugen! Welche Ordnung hat $(\mathbb{Z}/100\mathbb{Z})^\times$?

Tipp: $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{\bar{a} \mid \text{ggT}(a, n) = 1\}$