Prof. Dr. M. Kreuzer
A. Hennekemper

Abgabe: 01.02.2007, 10.15 h

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I für Lehramt Gymnasium

## WS 2006/07 Übungsblatt 13

**Aufgabe 1 Eine Determinante aus dem Weltall!**
Sei $K$ ein Körper und $a, b, c, d \in K$.
Berechnen Sie $\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$!

**Aufgabe 2 Liebe ist die stärkste Determinante des menschlichen Schicksals!**
Seien $v, w$ zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$ und $G \subseteq \mathbb{R}^2$ die Gerade durch $v$ und $w$. Zeigen Sie, dass

$$G = \{ \, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \, \}$$

gilt!

**Aufabe 3 Der Herr sprach: „Es werde Licht!“ Und es ward Licht!**
Erinnern Sie sich an die Aufgabe „Der Erste knipst das Licht an!“ (Aufgabe 4 auf Blatt 2)! Sei nun ein beliebiges Stromnetz mit einem beliebigen Lampenzustand gegeben. Warum kann man jeden anderen Lampenzustand erreichen, wenn die Determinate der zugehörigen Matrix ungleich null ist?

**Aufgabe 4 Es gibt keine Regel, die nicht irrt!**
Sei $K$ ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ mit $\det A \neq 0$. Zeigen Sei unter Verwendung der Cramerschen Regel, dass die Abbildung, die der rechten Seite $b \in K^n$ eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ die eindeutige Lösung $x \in K^n$ zuordnet, $K$-linear ist!

**Aufgabe 5 Die Matrix ist überall!**
Sei $K$ ein Körper und $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $\det M$ und überprüfen Sie ihr Ergebnis im Fall $n = 5$ mit CoCoA!