

Numerik I
2. Übung

Aufgabe 2.1

- (a) Zeigen Sie, dass für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf \mathbb{K}^n durch

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0 \right\} = \sup \{ \|Ax\| \mid x \in \mathbb{K}^n, \|x\| = 1 \}$$

eine mit ihr “verträgliche” Matrixnorm erklärt ist. Diese wird als die von $\|\cdot\|$ erzeugte “natürliche” Matrixnorm bezeichnet.

- (b) Zeigen Sie, dass die Frobenius-Norm

$$M_F(A) := \sqrt{\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2}$$

eine Matrixnorm ist, die mit $\|\cdot\|_2$ verträglich ist.

- (c) Warum ist die Frobenius-Norm im Allgemeinen keine natürliche Matrixnorm?

Aufgabe 2.2

- (a) Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Inverse A_i^{-1} , $i = 1, 2$, und die jeweiligen Konditionszahlen cond_1 , cond_∞ .

- (b) Berechnen Sie für die Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1000\alpha \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

die Konditionszahl $\text{cond}_\infty(M_\alpha)$ und bestimmen Sie α , so dass $\text{cond}_\infty(M_\alpha)$ minimiert wird.

Aufgabe 2.3

(a) Lösen Sie die Gleichungssysteme

(i) $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1.985 & -1.358 \\ 0.953 & -0.652 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2.212 \\ 1.062 \end{pmatrix},$$

(ii) $Ax = b^*$ mit A wie in (i) und $b^* = (2.212, 1.061)^T$.

(b) Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie groß sind die relativen Fehler $\|\delta x\|_1/\|x\|_1$ und $\|\delta x\|_\infty/\|x\|_\infty$, wenn der relative Fehler in den Matrixelementen höchstens $\pm 1\%$ und in den Komponenten der rechten Seite höchstens $\pm 3\%$ beträgt?

Aufgabe 2.4

(a) Lösen Sie durch Gaußsche Elimination (ohne Pivotierung) das lineare Gleichungssystem $Ax = b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & 9 & -2 & 1 \\ -3/2 & 30 & -12 & 0 \\ 1 & -15 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 18 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die LR -Zerlegung von A und berechnen Sie die Determinante $\det(A)$.

(c) Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} und die Konditionszahl $\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

Abgabe: Donnerstag, den 2.11.06.