Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. Blum
Dr. A. Schröder

3. November 2006

Numerik I

3. Übung

Aufgabe 3.1

Zeigen Sie für allgemeine Matrizen $\mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$

$$\|A\|_2 := \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \mid x\in\mathbb{K}^n, x\neq 0\right\} = \sup\left\{\sqrt{|\lambda|} \mid \lambda \text{ Eigenwert von } \bar{A}^\top A\right\}.$$

Aufgabe 3.2

(a) Beweisen Sie, dass sich die Elemente der LR-Zerlegung $T = L\cdot R$ bei den sogenannten Tridiagonalmatrizen T mit

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ c_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & c_n & a_n \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ \gamma_2 & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \\ 0 & & \gamma_n & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

durch folgende rekursive Beziehungen bestimmen lassen:

$$\begin{array}{rlll} & & \alpha_1 = a_1, & \beta_1 = b_1, \\ i = 2,\cdots,n-1: & \gamma_i = c_i/\alpha_{i-1}, & \alpha_i = a_i - \gamma_i\beta_{i-1}, & \beta_i = b_i, \\ & \gamma_n = c_n/\alpha_{n-1}, & \alpha_n = a_n - \gamma_n\beta_{n-1}. & \end{array}$$

(b) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix T im Fall $n = 12$, $b_i = c_{i+1} = -1$ für $i = 1,\dots,11$, $a_i = 4$ für $i = 1,\dots,12$.

Aufgabe 3.3

Es sei $m^\mu := (0,\dots,\ell_{\mu+1,\mu},\dots,\ell_{n,\mu})^\top \in \mathbb{R}^n$, $\mu = 1,\dots,n-1$ sowie

$$\tilde{m}^\mu := P_{r_{n-1},n-1}\cdots P_{r_{\mu+1},\mu+1} m^\mu$$

für die Permutationsmatrizen $P_{r_\mu,\mu}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mu\in\{1,\dots,n-2\}$ und $r_\mu\in\{\mu,\dots,n\}$. Ferner sei $\tilde{m}^{n-1} := m^{n-1}$. Mit der Einheitsmatrix $I\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und dem ν-ten Einheitsvektor $e^\nu\in\mathbb{R}^n$ sei

$$G_\mu := I - m^\mu(e^\mu)^\top,$$
$$\tilde{G}_\mu := I - \tilde{m}^\mu(e^\mu)^\top$$

für $\mu = 1,\dots,n-1$.

Zeigen Sie:

(a) $P_{r_\mu,\mu}(I - z(e^\nu)^T)P_{r_\mu,\mu} = I - (P_{r_\mu,\mu}z)(e^\nu)^\top$ für $z \in \mathbb{R}^n$.

(b) $\Pi_{i=1}^{n-1} G_{n-i} P_{r_{n-i},n-i} = (\Pi_{i=1}^{n-1}\tilde{G}_{n-i})(\Pi_{i=1}^{n-1} P_{r_{n-i},n-i})$

(c) $\tilde{G}_\mu^{-1} = I + \tilde{m}^\mu (e^\mu)^\top$

(d) $\Pi_{\mu=1}^{n-1}\tilde{G}_\mu^{-1} = I + \sum_{\mu=1}^{n-1} \tilde{m}^\mu (e^\mu)^\top$

(e) Es sei $R := (\Pi_{i=1}^{n-1} G_{n-i} P_{r_{n-i},n-i})A$ für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann gilt

$$P \cdot A = L \cdot R$$

mit einer linken unteren Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit Einsen auf der Hauptdiagonalen und $P := \Pi_{i=1}^{n-1} P_{r_{n-i},n-i}$.

Aufgabe 3.4

(a) Zeigen Sie, dass die regulären unteren Dreiecksmatrizen mit Einsen auf der Hauptdiagonalen und die regulären oberen Dreiecksmatrizen jeweils eine Gruppe bilden. Sind diese Gruppen abelsch?

(b) Zeigen Sie, dass die mit dem Gaußschen Verfahren erzeugte LR-Zerlegung einer regulären Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ eindeutig bestimmt ist.

Abgabe: Donnerstag, den 9.11.06.