

Numerik I
4. Übung

Aufgabe 4.1

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix. Der Gaußsche Zerlegungsalgorithmus (ohne Pivotierung) erzeugt bei Anwendung auf A eine Folge von Matrizen $A = A^{(0)} \rightarrow \dots A^{(k)} \rightarrow \dots A^{(n-1)} = R$ mit einer oberen Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ als Resultat. Zeigen Sie:

- (a) $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_{ii}^{(k)} \leq a_{ii}^{(k-1)}$
- (b) $\max_{1 \leq i, j \leq n} |r_{ij}| \leq \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|$

Aufgabe 4.2

- (a) Bestimmen Sie mit dem Cholesky-Verfahren die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 8 & 8 & 8 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 26 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 8 & 4 & 18 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & 7 & -1 & 42 & 13 \\ 4 & 2 & 7 & -4 & 13 & 40 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 2 \\ 11 \\ -45 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

- (b) Gegeben sei das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 20 & -18 \\ 0 & 0 & -18 & 19 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 20 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

- (i) Bestimmen Sie eine Näherungslösung mit dem Cholesky-Algorithmus unter Verwendung 4-stelliger Arithmetik mit korrekter Rundung.
- (ii) Versuchen Sie, das Ergebnis durch einen Nachiterationsschritt unter Verwendung 8-stelliger Arithmetik für den Defekt zu verbessern.

Aufgabe 4.3

Betrachtet werde das Gleichungssystem $Ax = b$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 4 & 12 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Untersuchen Sie, ob das System lösbar ist.
- (b) Bestimmen Sie eine Lösung nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate.
- (c) Ist diese Lösung eindeutig?
- (d) Ist die Matrix $A^T A$ positiv definit?

Aufgabe 4.4

Im Labor wurden die Molekulargewichte von 6 Stickstoffoxiden gemessen:

NO	N_2O	NO_2	N_2O_3	N_2O_5	N_2O_4
30.006	44.013	46.012	76.012	108.010	92.011

Bestimmen Sie hieraus mit Hilfe der Ausgleichsrechnung Näherungen für die Atomgewichte von Stickstoff (N) und Sauerstoff (O).

Abgabe: Donnerstag, den 16.11.06.