Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. Blum
Dr. A. Schröder

17. November 2006

Numerik I

5. Übung

Aufgabe 5.1

Nach dem Keplerschen Gesetz bewegt sich ein Himmelskörper im Sonnensystem auf einer ebenen Bahn von Ellipsen- oder Hyperbelform, wenn Störungen durch die Planeten vernachlässigt werden. Es bezeichnen (r, φ) Polarkoordinaten bzgl. des Standortes der Sonne. Die Bahn des Himmelskörpers ist dann gegeben durch die „Kegelschnittgleichung“

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

mit einem Parameter p und der sogenannten Exzentrizität e. Für $0 \leq e < 1$ handelt es sich um eine Ellipse, für $e \geq 1$ um eine Hyperbel. Für einen neu entdeckten Himmelskörper werden die folgenden Beobachtungen gemacht:

Tag	15.01.	15.04.	15.06.	15.08.	15.09.
r	10	5	2.5	1.3	1
φ	51°	67°	83°	108°	126°

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate den Typ der Kometenbahn. (Bringen Sie dazu zunächst die Gleichung in eine Form, die linear in 2 Unbekannten ist.)

Aufgabe 5.2

Ermitteln Sie mit Householdertransformationen die QR-Zerlegung der Matrizen:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -9 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.3

Es sei $c_{ij}, s_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $c_{ij}^2 + s_{ij}^2 = 1$ sowie $G_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit

$$G_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & c_{ij} & s_{ij} & & & \\ & & & -s_{ij} & c_{ij} & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ Zeile } i-1 \\ \leftarrow \text{ Zeile } i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

für $j \in \{1, \dots, n\}$ und $i \in \{2, \dots, n\}$. Ferner sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(a) Wie müssen c_{ij} und s_{ij} gewählt werden, damit $(G_{ij}A)_{ij} = 0$ ist?

(b) Da bei der Multiplikation $G_{ij}A$ nur die beiden Zeilen $i-1$ und i der Matrix A modifiziert werden, ist es möglich, Matrizen G_{ij} anzugeben, so dass

$$(\Pi_{j=1}^{n}\Pi_{k=j+1}^{n}G_{n+j+1-k,j})A = R \tag{1}$$

mit einer rechten oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Veranschaulichen Sie die in (1) beschriebenen Transformationen anhand einer schematischen Darstellung.

(c) Zeigen Sie, dass die Matrix

$$Q := (\Pi_{j=1}^{n}\Pi_{k=j+1}^{n}G_{n+j+1-k,j})^{\top}$$

orthogonal ist. Man erhält demnach eine QR-Zerlegung der Matrix A durch $A = QR$.

(d) Wieviele Quadratwurzelberechnungen und Multiplikationen sind zur Bestimmung von Q erforderlich? Vergleichen Sie den Rechenaufwand mit der QR-Zerlegung nach Householder! Wann ist die vorgestellte alternative QR-Zerlegung vorteilhafter?

Aufgabe 5.4

Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Donnerstag, den 23.11.06.