Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. Blum
Dr. A. Schröder

20. November 2006

Numerik I

6. Übung

Aufgabe 6.1

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Durch

$$U^\top AV = \Sigma := \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad p = \min(m, n)$$

und $\sigma_1 \geq \ldots \sigma_p \geq 0$ sei die Singulärwertzerlegung von A mit den orthogonalen Matrizen $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gegeben. Für $k < \operatorname{rang}(A)$ sei

$$A_k := \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^\top.$$

Zeigen Sie:

$$\sigma_{k+1} = \|A - A_k\|_2 = \min_{\substack{B\in\mathbb{R}^{m\times n},\\ \operatorname{Rang}(B)=k}} \|A - B\|_2$$

Aufgabe 6.2

Eine Matrix $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ habe die folgenden Eigenschaften:

(i) $(A^+A)^\top = A^+A$

(ii) $(AA^+)^\top = AA^+$

(iii) $A^+AA^+ = A^+$

(iv) $AA^+A = A$

Zeigen Sie:

(a) A^+ ist durch (i)-(iv) eindeutig festgelegt.

(b) Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 6.1 gilt $A^+ = V\Sigma^+U^\top$ mit

$$\Sigma^+ := \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1}, \ldots, \sigma_r^{-1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^{n\times m}$$

und $r := \operatorname{Rang}(A)$.

Aufgabe 6.3

Bestimmen Sie das approximierende Polynome p zur Funktion

$$f(x) = |x|, \quad -2 < x < 2.$$

1. Durch Interpolation in den Stützstellen $x_k = -2 + k$, $k = 0, \dots, 4$, ist ein Polynom $p \in \mathcal{P}_4$ zu ermitteln.
2. Mit Hilfe der Ausgleichsrechnung (Methode der kleinsten Quadrate) bzgl. der Stützstellen $x_k = -2 + \frac{k}{2}$, $k = 0, \dots, 8$, ist ein Polynom $p \in \mathcal{P}_2$ zu bestimmen.

Skizzieren Sie den jeweiligen Funktionsverlauf und vergleichen Sie den Approximationsfehler im Punkt $\frac{1}{3}$.
Wie verändert sich Teilaufgabe (ii), wenn $p \in \mathcal{P}_3$ gesucht ist? (Nicht rechnen!)

Aufgabe 6.4
Für verschiedene Orte wurde an einem bestimmten Tag die Tageslänge gemessen:

Ort	Tageslänge	Lage
A	$17h28m$	$55,7°$
B	$18h00m$	$57,7°$
C	$18h31m$	$59,3°$
D	$19h56m$	$62,6°$
E	$22h34m$	$65,6°$

Bestimme Sie die Tageslänge am Ort F bei $61,7°$ durch Auswertung des zugehörigen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Neville-Algorithmus (4-stellige Dezimalrechnung).

Abgabe: Donnerstag, den 30.11.06.