

Numerik I

7. Übung

Aufgabe 7.1

Sei $f(x) = x^6 - x^4 + 3x - 2$.

- (i) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom p_4 in den Knoten $x_0 = -4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ und $x_4 = 5$.
- (ii) Schätzen Sie den Interpolationsfehler für $x \in [-1, 1]$ ab.

Aufgabe 7.2

Seien x_0, x_1, \dots, x_m paarweise verschiedene Knoten aus $[a, b]$, $a > 0$. Berechnen Sie für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ die m -te dividierte Differenz $[x_0, x_1, \dots, x_m]$.

Aufgabe 7.3

Für die Funktion $f(x) = \cosh(x)$ ist die Wertetabelle gegeben

x	$f(x)$
0.52	1.1382741
0.56	1.1609408
0.60	1.1854652
0.64	1.2118867
0.68	1.2402474

Man bestimme durch Extrapolation eines geeigneten Differenzenquotienten möglichst gute Näherungen zum Ableitungswert $f'(0.6)$. Bestimmen Sie eine Näherungsformel zur Berechnung von $f''(x)$ und ermitteln Sie eine Näherung für $f''(0.6)$.

Aufgabe 7.4

Es sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Zudem sei $V_h := \{v \in C^0[a, b] \mid v|_{[x_{i-1}, x_i]} \in C^1[x_{i-1}, x_i], v(x_i) = v_i\}$ für Werte $v_0, \dots, v_n \in \mathbb{R}$. Betrachtet wird die Minimierungsaufgabe

$$\min_{v_h \in V_h} \int_a^b |v_h'(x)|^2 dx \rightarrow \min.$$

Zeigen Sie:

- (i) Jede Lösung dieser Aufgabe ist ein Spline vom Grad $k = 1$.

(ii) Eine Lösung u_h existiert und ist eindeutig bestimmt.

(iii) Für eine Funktion $f \in C^2[a, b]$ sei $v_i := f(x_i)$. Geben Sie eine Abschätzung für

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - u_h(x)|$$

an.

Abgabe: Donnerstag, den 7.12.06.