Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. Blum
Dr. A. Schröder

8. Dezember 2006

Numerik I

8. Übung

Aufgabe 8.1

S bezeichne den Vektorraum der kubischen natürlichen Splinefunktionen zu den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

(i) Sind die folgenden Funktionen in S ?

(a) $f(x) = x^3 - x^2$,

(a) $f(x) = x^2(x-6) - (x-2)^3$,

(a) $f(x) = (\max\{0, x-1\})^3 - \frac{x^3}{2}$.

(ii) Bestimmen Sie den interpolierenden Spline $s_2 \in S$ für $f(x) = x^3$. Wie lautet das Ergebnis, wenn die natürlichen Randbedingungen durch $s_2''(x_0) = f''(x_0)$, $s_2''(x_2) = f''(x_2)$ ersetzt werden?

Aufgabe 8.2

Es sei $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ eine äquidistante Knotenfolge mit Schrittweite h. Bestimmen Sie die normierten B-Splines $B_{i,3}$.

Aufgabe 8.3

Es seien $b_0, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ die Bézier-Koeffizienten eines Polynoms p vom Grad $k \geq 0$. Zudem seien die Polynome $b_{r,s}$ für $0 \leq r \leq s \leq k$ definiert durch

$$b_{r,s}(z) := \sum_{i=r}^{s} b_i P_{i-r}^{s-r}(z).$$

(i) Zeigen Sie:

$$b_{r,s}(z) = (1-z)b_{r,s-1}(z) + z b_{r+1,s}(z)$$

(ii) Es seien $b_0 = 2$, $b_1 = 10$, $b_2 = 7$, $b_3 = 0$. Berechnen Sie $p(0.4)$ mit Hilfe des folgenden Schemas (Algorithmus von Casteljau):

$$\begin{array}{llll}
b_0 & & & \\
b_1 & b_{0,1} & & \\
b_2 & b_{1,2} & b_{0,2} & \\
b_3 & b_{2,3} & b_{1,3} & b_{0,3}
\end{array}$$

Aufgabe 8.4

Es bezeichne $\tilde{C}^1[0,1]$ den (unendlichdimensionalen) Vektorraum der stetigen Funktionen, deren Ableitungen stückweise stetig mit endlich vielen Sprungstellen sind. Weiter sei

$$V := \{f \in \tilde{C}^1[0,1] \ : \ f(0) = f(1) = 0\}.$$

Auf V ist durch die Vorschrift

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(x) g'(x) \, dx$$

eine Bilinearform definiert.

(i) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V ein Skalarprodukt ist.

(ii) Das Intervall $[0,1]$ sei in n gleichlange Teilintervalle unterteilt,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \quad x_i = ih, \ h = \frac{1}{n}.$$

Gesucht ist die beste Approximation einer Funktion $u \in V$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im (endlichdimensionalen) Raum $S_{1,n} \cap V$ der linearen Spline-Funktionen. Geben Sie die Form des linearen Gleichungssystems an, durch welches die beste Approximation bestimmt ist. Verwenden Sie dazu die Orthogonalitätsrelation aus der Vorlesung und benutzen Sie die linearen B-Splines als Basis von $S_{1,n}$.

Abgabe: Donnerstag, den 14.12.06.