Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. Blum
Dr. A. Schröder

15. Dezember 2006

Numerik I

9. Übung

Aufgabe 9.1

Es sei

$$\psi_k(x) = \frac{k!}{(2k)!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Zeigen Sie:

(i) $\{\psi_k\}_{k=0}^n$ sind bzgl. des L^2-Skalarprodukts über $[-1, 1]$ orthogonal.

(ii) $\|\psi_k\| = \frac{k!^2}{(2k)!} \sqrt{\frac{2^{2k+1}}{2k+1}}$

(iii) $\psi_k(1) = \frac{k!^2}{(2k)!} 2^k$

(iv) Die ψ_k stimmen mit den Legendre-Polynomen überein.

Aufgabe 9.2

Es sei $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ und $U := \{a + bx^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subset C[0, 1]$.

(i) Zeigen Sie, dass U die Haarsche Bedingung auf $[0, 1]$ erfüllt.

(ii) Bestimmen Sie ein $h_0 \in U$ und ein Extremum $\xi \in (0, 1)$ der Fehlerfunktion, so dass gilt:

$$(f - h_0)(0) \;=\; -(f - h_0)(\xi) \;=\; (f - h_0)(1)$$

(iii) Zeigen Sie: h_0 ist beste Approximation (in der Maximumnorm) in U an f.

Aufgabe 9.3

Es sei $P : C[-1, 1] \to \mathcal{P}_1$ die Abbildung, die jedem $f \in C[-1, 1]$ seine beste Approximation (in der Maximumnorm) zuordnet. Zeigen Sie, dass P i.A. nicht linear ist.

Aufgabe 9.4

(i) Beweisen Sie, dass für die Trapezregel die Fehlerdarstellung

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + \int_a^b \frac{1}{2}(x - a)(x - b) f''(x)\,dx$$

gilt und folgern Sie daraus die Fehlerdarstellung aus der Vorlesung.

(ii) Folgern Sie aus der ersten Fehlerdarstellung die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \int_a^b |f''(x)|\,dx.$$

(iii) Zur Verbesserung der Genauigkeit werde das Intervall $[a, b]$ in n gleichgroße Teilintervalle mit der Breite $h := (b-a)/n$ unterteilt. Wenden Sie die Trapezregel auf jedem der Teilintervalle an und benutzen Sie die Fehlerabschätzung aus (ii) zur Herleitung einer Abschätzung für den Gesamtfehler dieser ,,summierten Trapezregel". Leiten Sie eine zweite Fehlerabschätzung mit Hilfe der aus der Vorlesung bekannten Abschätzung (angewandt auf jedes Teilintervall) her. Welche Fehlerabschätzung ist vorzuziehen?

Abgabe: Donnerstag, den 21.12.06.