Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. Blum
Dr. A. Schröder

12. Januar 2007

Numerik I

11. Übung

Aufgabe 11.1

Geben Sie eine Gauß-Tschebyscheff-Quadraturformel zur Berechnung des Integrals

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(\pi x/2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

mit einem Fehler $\leq 10^{-4}$ an.

Aufgabe 11.2

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin(x)\,dx$$

mit Hilfe des Romberg-Verfahrens (Schrittweitenfolge $h_i = 2^{-i-1}\pi$, $i = 0, 1, 2, \ldots$) mit einem Fehler $\leq 10^{-4}$. Kontrollieren Sie die Genauigkeit mit dem aus der Vorlesung bekannten Abbruchkriterium für Extrapolationsverfahren.

Aufgabe 11.3

Zeigen Sie, dass die zweite Spalte des Romberg-Schemas der summierten Simpson-Regel entspricht.

Aufgabe 11.4

Es sei $f \in C^2[a,b]$ und $z \in (a,b)$, so dass

$$f(z) = z, \quad f'(z) \neq 1.$$

Zeigen Sie:

(i) Es existiert ein $\rho > 0$, so dass

$$g(x) := \begin{cases} x - \dfrac{(f(x)-x)^2}{f(f(x)) - 2f(x) + x}, & x \in K_\rho(z)\backslash\{z\} \\ z, & x = z \end{cases}$$

für $x \in K_\rho(z) \ = \{x \in [a,b] \mid |z-x| < \rho\}$ wohldefiniert ist.

(ii) Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass

$$\forall x \in K_\rho(z): \ |g(x) - z| \leq c(x-z)^2$$

ist.

(iii) Das Iterationsverfahren mit der Vorschrift

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= f(x_n) \\ x_{n+2} &:= f(x_{n+1}) \\ x_{n+3} &:= x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \end{aligned}$$

ist für $x_0 \in [a, b]$ ein Verfahren von zweiter Ordnung.

Abgabe: Donnerstag, den 18.1.07.