Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. Blum
Dr. A. Schröder

19. Januar 2007

Numerik I

12. Übung

Aufgabe 12.1

Zur Berechnung der Lösung $z \in [0.5, 0.6]$ der Gleichung $x + \ln(x) = 0$ werden folgende Fixpunktiterationen vorgeschlagen:

i) $x_t = -\ln(x_{t-1})$

ii) $x_t = e^{-x_{t-1}}$

iii) $x_t = \frac{1}{2}(x_{t-1} + e^{-x_{t-1}})$

Welche dieser Iterationen kann man verwenden? Wie kann man die Iterationen ii. und iii. durch den Ansatz

$$x_t = \frac{1}{1+\beta}(\beta x_{t-1} + e^{-x_{t-1}})$$

verbessern?

Aufgabe 12.2

Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren für stetig differenzierbare Funktionen mindestens super-linear konvergiert.

Aufgabe 12.3

Es seien $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 2\}$ und $H := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\}$.

i) Bestimmen Sie $K \cap H$.

ii) Geben Sie ein Newton-Verfahren zur Bestimmung von $K \cap H$ mit einer geeigneten Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an und berechnen Sie ausgehend von dem Startwert $x^0 = (1, 1)^\top$ die Iterierten bis $\|x^t - x^{t-1}\|_\infty \leq 2 \cdot 10^{-3}$.

iii) Bestimmen Sie eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form

$$C = \begin{pmatrix} c & c \\ c & -c \end{pmatrix}, \quad c \neq 0,$$

so dass die Fixpunktiteration

$$x^{t+1} = x^t - Cf(x^t)$$

ausgehend von x^0 garantiert gegen die Nullstelle z von f im ersten Quadranten konvergiert. Wieviele Schritte sind erforderlich, so dass $\|x^t - z\| \leq 2 \cdot 10^{-3}$ gilt.

Aufgabe 12.4

Gegeben sei das nichtlineare Problem

$$x_1 = (5 + x_1^2 + x_2^2)^{-1}\,, \qquad x_2 = (x_1 + x_2)^{1/4}\,.$$

a) Zeigen Sie, dass eine reelle Lösung existiert.

b) Mit dem Startvektor $(0.2, 1)^T$ führe man jeweils einen Schritt der sukzessiven Approximation (Fixpunktiteration) und des Newton-Verfahrens durch.

c) Beweisen Sie die Konvergenz der sukzessiven Approximation für beliebige Startwerte $x_1^0\,,\ x_2^0 \geq 0\,.$

Abgabe: Donnerstag, den 25.1.07.