

Numerik I  
13. Übung

**Aufgabe 13.1**

Es sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Die Lösung der Eigenwertaufgabe  $Ax = \lambda x$  mit  $\|x\|_2 = 1$  ist äquivalent zu dem nichtlinearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} Ax - \lambda x &= 0, \\ \|x\|_2^2 - 1 &= 0, \end{aligned}$$

von  $n+1$  Gleichungen in den  $n+1$  Unbekannten  $x_1, \dots, x_n, \lambda$ . Geben Sie die Newton-Iteration zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems an und führen Sie zwei Newton-Schritte für die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit den Startwerten  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 = 1.5$  und  $\lambda^0 = 3.5$  durch. Stellen Sie fest, ob das Newton-Verfahren in diesem Fall quadratisch konvergiert.

**Aufgabe 13.2**

Berechnen Sie für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

den Spektralradius  $\rho(A)$  und die Normen  $\|A\|_1$ ,  $\|A\|_2$  und  $\|A\|_\infty$ .

**Aufgabe 13.3**

Untersuchen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix},$$

ob das Jacobi- und das Gauß-Seidel-Verfahren für Gleichungssysteme  $A_i x = b$ ,  $i = 1, 2$ , konvergieren.

**Aufgabe 13.4**

Wieviele Iterationen sind mit dem Jacobi- und dem Gauß-Seidel-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erforderlich, um den Iterationsfehler  $\|x^t - x\|_2$  um den Faktor  $10^{-6}$  zu reduzieren?

**Abgabe:** Donnerstag, den 1.2.07.