

Numerik I

Test

Versuchen Sie, die folgenden Fragen zu beantworten. Dieser Test dient der eigenen Wissenskontrolle zur Vorbereitung auf die bevorstehende Klausur oder auf eine mündliche Prüfung in Numerik I.

1. Was bedeuten die Bezeichnungen $O(h)$ und $o(h)$?
2. Man gebe $\|A\|_\infty$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

an.

3. Wozu dient Spaltenpivotierung beim Gaußschen Eliminationsverfahren?
4. Was versteht man unter "Nachiteration"?
5. Welche Kondition hat eine reguläre Diagonalmatrix bzgl. einer natürlichen Matrizen-norm? Gilt das Resultat für beliebige Normen auf $\mathbf{R}^{n \times n}$ bzw. für beliebige Matrizen-normen?
6. Welchen relativen Fehler erhält man bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$Dx = b$$

mit einer Diagonalmatrix D a) bei Störungen in der Diagonalen, b) bei beliebigen Störungen?

7. Wird die Norm $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{ij}^2$ von einer Vektornorm erzeugt? (Kurze Begründung)
8. Mit einer wie starken (relativen) Fehlerverstärkung muß man bei der Auswertung von $x^{1/3}$ rechnen?
9. Bei Verwendung doppelter Genauigkeit sei die relative Maschinengenauigkeit mindestens 10^{-16} . Wie viele Stellen sind nach der Multiplikation von 50 Zahlen (mindestens) noch zuverlässig? Wie lautet das entsprechende Ergebnis für die Addition?
10. Welche Gestalt hat das charakteristische Polynom einer Matrix mit Spektralradius 0?
11. Was versteht man unter einer QR -Zerlegung?

12. Wie viele arithmetische Operationen werden (näherungsweise) für die Berechnung der QR -Zerlegung nach Householder für eine Matrix $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ benötigt?
13. Die symmetrische Matrix $A^T A$ besitzt eine Darstellung der Form $QA^T A Q = D$ mit einer orthogonalen Matrix Q und einer Diagonalmatrix D . Man gebe den Zusammenhang von Q und D mit den in der Singulärwertzerlegung von A auftretenden Matrizen U , V und Σ an.
14. Man zeige mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, daß die positiven Eigenwerte von AA^T und $A^T A$ übereinstimmen.
15. Durch wie viele Knoten ist die Lösung der Lagrangeschen Interpolationsaufgabe für Polynome in P_7 eindeutig bestimmt?
16. Wie lautet das Restglied der Hermite-Interpolation bei Verwendung nur einer (mehrfachen) Stützstelle?
17. Welche Vorgaben an den Intervallenden erlauben die eindeutige Berechnung eines interpolierenden kubischen Splines?
18. Wie viele linear unabhängige kubische B-Splines gibt es bei Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle?
19. Wie lauten die Koeffizienten der linearen B-Splines zur Lösung der Lagrangeschen Interpolationsaufgabe?
20. Eine Funktion sei auf $(-1, 1)$ von der Form $\sqrt{1-x^2}p(x)$ mit $p \in P_3$, auf $(1, 2)$ linear und auf $(2, 4)$ von der Form $(x-2)^2(x-4)^2p(x)$ mit $p \in P_5$. Wie würde man das Integral über $(-1, 4)$ mit möglichst wenig Funktionsauswertungen berechnen?
21. Wie berechnet man mit möglichst wenig Funktionsauswertungen eine Näherung für das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx ,$$

die exakt ist für $f \in P_5$.

22. Welche Genauigkeit läßt sich (für genügend glatte Funktionen) mit 3 Extrapolationsschritten beim Rombergschen Integrationsverfahren erzielen?