W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Di, 10.04.2007, 12h

Algebra I
Übungsblatt 1

Aufgabe 1:
Seien G, H Gruppen und sei $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist U eine Untergruppe von H, dann ist $\varphi^{-1}(U)$ eine Untergruppe von G.
b) Ist U eine Untergruppe von G, dann ist $\varphi(U)$ eine Untergruppe von H.
c) φ ist genau dann injektiv, wenn $\ker(\varphi) = \{e\}$ gilt.
d) φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn φ bijektiv ist.
e) Ist φ surjektiv, dann liefert die Abbildung $U \mapsto \varphi^{-1}(U)$ eine Bijektion zwischen der Menge aller Untergruppen H und der Menge aller derjenigen Untergruppen von G, die den Kern von φ enthalten.

Aufgabe 2:
Sei $V := \mathbb{R}^2$ und $G := \mathrm{GL}(V)$ die Gruppe der Automorphismen von V. Wir wählen ein regelmäßiges Sechseck $S \subseteq V$ zentriert in 0.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $D_6 := \{g \in G \mid g(S) = S\}$ eine Untergruppe von G ist.
b) Bestimmen Sie explizit alle Elemente von D_6.

Solche Invariantengruppen D_n von regelmäßigen n-Ecken heißen Diedergruppen. Ist D_n eine abelsche Gruppe?

Aufgabe 3:
Sei G eine Gruppe und $H \neq \emptyset$ eine Teilmenge von G. Auf $G \times G$ sei eine Relation $\sim$ definiert durch

$$g_1 \sim g_2 \quad :\Leftrightarrow \quad g_1 g_2^{-1} \in H.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist genau dann eine Äquivalenzrelation, wenn H eine Untergruppe von G ist.
b) Ab jetzt nehmen wir an, dass H eine Untergruppe von G ist. Dann sind die Äquivalenzklassen von $\sim$ gerade die Rechtsnebenklassen Hg von H in G.
c) Es existiert eine Bijektion zwischen der Menge der Rechtsnebenklassen und der Menge der Linksnebenklassen von H in G.
c) Die Menge der Rechtsnebenklassen von H in G bildet mit der repräsentantenweise definierten Multiplikation genau dann eine wohldefinierte Gruppe, wenn H ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 4:
Seien G, H Gruppen und $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass es dann genau einen Isomorphismus $\overline{\varphi} : G/\ker(\varphi) \longrightarrow \varphi(G)$ gibt, so dass $\overline{\varphi}(\bar{g}) = \varphi(g)$ für alle $g \in G$.