W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 23.04.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 3

Aufgabe 10:
Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

a) H operiert effektiv auf der Menge G durch Linksmultiplikation.
b) Die Aussage welchen Satzes erhält man, wenn man die Klassengleichung für die Operation aus a) anwendet.

Aufgabe 11:
Bestimmen Sie alle Untergruppen der Diedergruppe D_6 aus Aufgabe 2. Testen Sie für jede Untergruppe, ob sie zyklisch, abelsch, Normalteiler oder p-Sylowuntergruppe ist.

Aufgabe 12:
Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung p^2. Zeigen Sie:

a) G ist abelsch.
b) G ist entweder zyklisch oder isomorph zu $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$.

Aufgabe 13:
Seien p und q Primzahlen mit $p < q$.

a) Sei G eine Gruppe der Ordnung pq. Bestimmen Sie die Anzahl der q-Sylowuntergruppen von G.
b) Eine Gruppe G heißt *einfach*, falls $\{e\}$ und G die einzigen Normalteiler von G sind. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung p^2q nicht einfach ist.

Satz: Sei G eine endliche Gruppe, sei p der kleinste Primteiler von $\mathrm{ord}(G)$ und U eine Untergruppe von G vom Index p. Dann ist U ein Normalteiler von G.

Aufgabe 14:
Vervollständigen Sie den folgenden Beweis des obigen Satzes:

Sei X die Menge aller Untergruppen von G und operiere G auf X durch Konjugation. Die Elemente der Bahn G_U von U unter G haben die Gestalt ____________. Es gilt U _____ $\mathrm{Stab}(U)$ und nach Proposition 6.10 ist $|G_U| = (G : \mathrm{Stab}(U))$. Somit besteht die Konjugationsklasse G_U entweder aus _____ oder aus _____ Elementen. Im ersten Fall ist U offensichtlich ein Normalteiler von G. Im anderen Fall gilt $U = \mathrm{Stab}(U)$, denn U _____ $\mathrm{Stab}(U)$ und $(G : U)$ _____ $(G : \mathrm{Stab}(U))$. Da G auf G_U durch Konjugation operiert, gibt es einen Homomorphismus

$$\varphi : G \longrightarrow S(G_U, G_U),\ g \mapsto (hUh^{-1} \mapsto ghUh^{-1}g^{-1}),$$

wobei $S(G_U, G_U)$ die Permutationsgruppe auf G_U bezeichnet. Nach dem Homomorphiesatz und dem Satz von Lagrange ist $(G : \ker(\varphi))$ ein Teiler von $|S(G_U, G_U)| =$ _____. Da $(G : \ker(\varphi))$ auch ein Teiler der Ordnung von G und p nach Voraussetzung der kleinste Primteiler von $\mathrm{ord}(G)$ ist, gilt insbesondere $(G : \ker(\varphi)) =$ _____. Es ist also

$$\_\_\_\_\_ = (G : \ker(\varphi)) = (G : U) \cdot (U : \ker(\varphi)) = p \cdot (U : \ker(\varphi)),$$

d.h. $(U : \ker(\varphi)) =$ _____ und damit U _____ $\ker(\varphi)$. Da nun der Kern von φ ein Normalteiler von G ist, ist auch U ein Normalteiler von G. $\square$