W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 30.04.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 4

Aufgabe 15:
Sei R ein Integritätsbereich und sei die Relation $\sim$ auf $R \times (R\backslash\{0\})$ definiert durch

$$(a,b) \sim (c,d) \;:\Leftrightarrow\; ad = bc.$$

Zeigen Sie:

a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
b) Die Menge $\mathrm{Quot}(R)$ der Äquivalenzklassen von $\sim$ bildet mit den in der Vorlesung definierten Verknüpfungen einen Körper und R lässt sich als ein Teilring von $\mathrm{Quot}(R)$ ansehen.

Aufgabe 16:
Sei R ein kommutativer Ring und I ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass I genau dann ein Primideal ist, wenn R/I ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 17:
Sei R ein kommutativer Ring und seien I, J Ideale von R. Zeigen Sie, dass dann auch $I + J$ und $I \cap J$ Ideale von R sind.

Aufgabe 18:
Sei R ein kommutativer Ring und sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ eine aufsteigende Kette von Idealen I_j von R. Zeigen Sie, dass dann auch $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$ ein Ideal von R ist.

Aufgabe 19:
Sei R ein kommutativer Ring, sei S ein Integritätsbereich und sei $\varphi : R \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\ker(\varphi)$ ein Primideal von R ist.