W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 21.05.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 7

Aufgabe 28:
Sei R ein faktorieller Ring und $f \in R[x]\backslash\{0\}$ ein primitives Polynom, d.h. $v_p(f) = 0$ für alle Primelemente $p \in R$. Zeigen Sie:

a) Sei S ein Integritätsbereich und $\varphi : R[x] \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, der kein Polynom positiven Grades auf eine Einheit in S abbildet. Ist dann $\varphi(f)$ irreduzibel in S, so ist f irreduzibel in $R[x]$.
b) Sei $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in R$ und $p \in R$ ein Primelement mit $p \not| \; a_n$. Ist das Polynom $[a_n]x^n + \cdots [a_1]x + [a_0]$ irreduzibel in $(R/\langle p \rangle)[x]$, so ist f irreduzibel in $R[x]$.
c) Für jedes $a \in R$ ist $f(x + a)$ genau dann irreduzibel in $R[x]$, wenn $f(x)$ irreduzibel in $R[x]$ ist.

Aufgabe 29:
Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

a) Das Polynom $f(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
[Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Polynom $f(x + 1)$.]
b) Die folgenden Polynome sind in den jeweiligen Ringen irreduzibel:
    i) $x^5 + 4x^4 - 8x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$,
    ii) $x^3 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
    iii) $x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$,
    iv) $y^3 + (x + 1)^2 y + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$.

Aufgabe 30:
Sei R ein Hauptidealbereich und M ein endlich erzeugter R-Modul.

a) Zeigen Sie, dass $M' = M/T(M)$ ein endlich erzeugter torsionsfreier R-Modul ist.
b) Nach Korollar 8.9 existieren Elemente $b_1, \ldots, b_r \in M$, so dass $[b_1], \ldots, [b_r]$ eine Basis von M' ist. Zeigen Sie, dass $b_1, \ldots, b_r$ linear unabhängig sind.
c) Sei $F = Rb_1 + \cdots + Rb_r$. Zeigen Sie, dass dann $M = T(M) \oplus F$ gilt.

Aufgabe 31:
Sei G eine abelsche Gruppe der Ordnung 36. Bestimmen Sie alle Isomorphietypen von G.