W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Di, 29.05.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 8

Aufgabe 32: (Satz von Wilson)
Zeigen Sie, dass für jede Primzahl p gilt $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Aufgabe 33:
Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \pmod 4$. Zeigen Sie:

a) Die Kongruenz $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ besitzt eine Lösung in $\mathbb{Z}$.
   [Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Wilson.]
b) Die Zahl p ist nicht prim in $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 34:
Sei $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass genau dann $p \equiv 1 \pmod 4$ gilt, wenn Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren mit $p = a^2 + b^2$.

Aufgabe 35:
Sei K ein Körper, V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

a) Für $f \in K[x]$ und $v \in V$ definieren wir $f \cdot v := (f(\varphi))(v)$. Zeigen Sie, dass V damit zu einem endlich erzeugten $K[x]$-Torsionsmodul wird.
b) Bestimmen Sie die Menge $\{f \in K[x] \mid f \cdot v = 0 \text{ für alle } v \in V\}$.
c) Für jedes irreduzible Polynom $p \in K[x]$ sei $V_p = \{v \in V \mid p^n \cdot v = 0 \text{ für ein } v \in \ V\}$. Zeigen Sie, dass das Polynom p genau dann ein Teiler des Minimalpolynoms von φ ist, wenn $V_p \neq \{0\}$ gilt.
d) Zeigen Sie, dass V eine K-Basis besitzt, bzgl. der die Darstellungsmatrix von φ aus Blöcken der Form
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ 1 & 0 & & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_n \end{pmatrix}$$
   entlang der Hauptdiagonalen und sonst aus Nullen besteht.
   [Hinweis: Verwenden Sie Satz II.8.13 aus der Vorlesung.]
e) Beweisen Sie die Existenz der Jordan-Normalform für den Fall, dass das Minimalpolynom von φ in $K[x]$ in Linearfaktoren zerfällt.
f) Zeigen Sie, dass das Produkt der Elementarteiler des $K[x]$-Torsionsmoduls V gerade das charakteristische Polynom von φ ist.