W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 11.06.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 10

Aufgabe 40:
Sei $m \in \mathbb{N}$ ein Produkt paarweise verschiedener Primzahlen und $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m})/\mathbb{Q}$. Geben Sie die kleinste normale, separable Körpererweiterung $L/\mathbb{Q}$ an, für die gilt $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{m}) \subseteq L \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 41:
Zeigen Sie:

a) Ist G eine endliche, abelsche, nicht zyklische Gruppe, dann existiert eine Zahl $d \in \mathbb{N}$, so dass d ein echter Teiler von $\operatorname{ord}(G)$ ist und für alle $g \in G$ gilt $g^d = e$.
[Hinweis: Verwenden Sie den Struktursatz aus Abschnitt II.8.]
b) Ist K ein Körper, so ist jede endliche Untergruppe von K^* zyklisch.

Aufgabe 42:
Sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie:

a) Es gilt $|K| = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
b) Jede algebraische Körpererweiterung von K ist separabel.

Aufgabe 43:
Sei p eine Primzahl und $K = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings in der Unbestimmten t über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass das Polynom $x^p - t \in K[x]$ eine mehrfache Nullstelle besitzt und dass $K[x]/\langle x^p - t\rangle$ eine nicht-separable Körpererweiterung von K ist.