W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 18.06.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 11

Aufgabe 44:
Bestimmen Sie alle Zwischenkörper der Körpererweiterung

a) $\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{5}})/\mathbb{Q}$,
b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.

Aufgabe 45:
Sei L/K eine Galoiserweiterung von endlichem Grad mit Zwischenkörper $K \subseteq F \subseteq L$. Weiter seien H, H_1, H_2 Untergruppen von $\mathrm{Gal}(L/K)$ und $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Zeigen Sie:

a) $H_1 \subseteq H_2 \;\Leftrightarrow\; L^{H_1} \supseteq L^{H_2}$.
b) $\mathrm{ord}(H) = [L : L^H]$.
c) $[\mathrm{Gal}(L/K) : H] = [L^H : K]$.
d) L/F ist eine Galoiserweiterung.
e) $\mathrm{Gal}(L/\sigma(F)) = \sigma\,\mathrm{Gal}(L/F)\,\sigma^{-1}$.
f) $L^{\sigma H \sigma^{-1}} = \sigma(L^H)$.
g) H ist genau dann ein Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L/K)$, wenn L^H/K eine normale Körpererweiterung von K ist.
h) Ist H ein Normalteiler von $\mathrm{Gal}(L/K)$, dann sind $\mathrm{Gal}(L^H/K)$ und $\mathrm{Gal}(L/K)/H$ isomorph.

Aufgabe 46:
Sei L/K eine Körpererweiterung mit Zwischenkörpern $K \subseteq E \subseteq L$ und $K \subseteq F \subseteq L$. Der Körper $E(F)$ heißt das *Kompositum* von E und F in L und wird mit EF bezeichnet. Zeigen Sie:

a) Es gilt $EF = F(E)$.
b) Ist E/K eine Galoiserweiterung, so ist EF/F eine Galoiserweiterung von F.
c) Ist E/K eine Galoiserweiterung, dann existiert ein kanonischer injektiver Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Gal}(EF/F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(E/K)$.