W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 25.06.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 12

Aufgabe 47:
Sei p eine Primzahl, sei $n \in \mathbb{N}$ und $q = p^n$. Zeigen Sie:

a) Der Zerfällungskörper von $x^q - x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$ besitzt q Elemente.
b) Bis auf Isomorphie existiert genau ein Körper mit q Elementen. Er wird mit $\mathbb{F}_q$ bezeichnet.
c) Jeder endliche Körper ist isomorph zu genau einem Körper des Typs $\mathbb{F}_q$.

Aufgabe 48:
Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit $q = p^n$ Elementen, wobei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ ist eine Galoiserweiterung.
b) Der Frobenius-Automorphismus $\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q$, $a \mapsto a^p$ erzeugt die Galoisgruppe von $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$, d.h. $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n.

Aufgabe 49:
Für $n \in \mathbb{N}$ ist das n*-te Kreisteilungspolynom* $F_n(x)$ definiert durch

$$F_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \mathrm{ggT}(k,n)=1}} (x - \xi_n^k),$$

wobei $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist. Zeigen Sie mit Hilfe der Theorie der Kreisteilungskörper:

a) $F_n(x)$ ist ein normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[x]$.
b) $F_n(x)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
c) $x^n - 1$ ist das Produkt aller Kreisteilungspolynome $F_m(x)$ mit $m|n$.