W. Gubler
H. Bluhm

Abgabe: Mo, 09.07.2007, 10h

Algebra I
Übungsblatt 14

Aufgabe 54:
Sei $f(x) \in K[x]$ ein separables Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Zerfällungskörper L über K und seien $a_1, \ldots, a_n \in L$ die Nullstellen von $f(x)$. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(x)$ genau dann irreduzibel ist, wenn die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ transitiv auf der Menge der Nullstellen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ operiert.

Aufgabe 55:
Zeigen Sie:

a) Für jedes Polynom $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ist die Gleichung $f(x) = 0$ durch Radikale auflösbar.
b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert ein irreduzibles Polynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad n, so dass die zugehörige Gleichung $f(x) = 0$ durch Radikale auflösbar ist.
c) Für jede natürliche Zahl $n \geq 5$ existiert ein Polynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad n, so dass die zugehörige Gleichung $f(x) = 0$ nicht durch Radikale auflösbar ist.

Aufgabe 56:
Sei $f(x) = x^5 - 4x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ und L der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

a) Das Polynom $f(x)$ ist irreduzibel und separabel.
b) Das Polynom $f(x)$ besitzt genau drei reelle Nullstellen.
[Hinweis: Betrachten Sie $f'(x)$.]
c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$, angesehen als eine Untergruppe der S_5, enthält einen Zyklus der Ordnung 5 und eine Transposition.
d) Es gilt $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = S_5$, und die Gleichung $f(x) = 0$ ist damit nicht durch Radikale auflösbar.