UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 1

Abgabe 11.04.07, 14 Uhr

1. Sei $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$.
(i) Geben Sie das 2. Taylorpolynom im Entwicklungspunkt 0 an.
(ii) Weisen Sie nach, dass der Approximationsfehler des *ersten* Taylorpolynoms im Intervall [-1,0] kleiner als 1/3 ist.

2.
(i) Man zeige, dass die Funktionen $\dfrac{1}{1+x^2}$ und $\arctan x$ reell-analytisch auf $\mathbb{R}$ sind.
(ii) Man berechne die Potenzreihenentwicklung der Funktionen $\arcsin$ und Arsinh in 0.

3. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^\infty(I)$. Es gelte folgende Abschätzung für das *Wachstum der Ableitungen* von f:

$$\forall a \in I \; \exists \, \delta, \; h, \; C > 0 \; \forall k \in \mathbb{N}_0 \; : \; \sup_{|x-a| \le \delta} |f^{(k)}(x)| \le C \cdot k! \cdot h^k.$$

Man zeige, dass f reell-analytisch auf I ist.

4. Wie weit muß die Funktion $\sin x$ in Taylorreihe um 0 entwickelt werden, damit der Fehler im Intervall $[-1, 1]$ kleiner als 10^{-3} ist?

5. Sei $f(x) = xe^x$.
(i) Zeigen Sie dass $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(ii) Bestimmen Sie die Taylorreihe von f in 0 und berechnen Sie dessen Konvergenzradius.
(iii) Zeigen Sie durch Abschätzung des Restglieds, dass die Taylorreihe gegen f konvergiert.

6. Man beweise die Funktionalgleichungen:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w, \quad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

7. Man zeige, dass die komplexen Sinus und Kosinus -Funktionen nur reelle Nullstellen haben.