UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 2
Abgabe 18.04.07, 14 Uhr

1. Für $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ berechne man Log$(1 - e^{it})$.

2. Der komplexe *Tangens* wird durch

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$$

definiert.
(i) Man zeige, dass dieser den Streifen $S := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < x \le \pi/2\} \setminus \{\pi/2\}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ abbildet.
(ii) Die Umkehrabbildung $\arctan : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to S$ heißt (Hauptzweig des) *Arcustangens*. Man zeige:

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \text{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \; z \ne \pm i.$$

3. Man beweise die *Höldersche Ungleichung*:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

für $x_i, y_i \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}, \; p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$.

4. Man beweise die *Minkowskische Ungleichung*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

für $x_i, y_i \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}, \; p \ge 1$.

5. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Man beweise, dass durch

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine neue Metrik auf X definiert wird. Man zeige: $d^* \le \min\{1, d\}$ und $d^*(x_n, x) \to 0 \Leftrightarrow d(x_n, x) \to 0$. Ist d^* äquivalent zu d?
Hinweis: d, d^* sind äquivalent $\Leftrightarrow \exists A, B > 0$, so dass $Ad \le d^* \le Bd$.