UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 3

Abgabe: 25.04.07, 14 Uhr

1. Man untersuche, ob die folgenden Formeln Normen oder Halbnormen auf $\mathbb{K}^3$ definieren:
a) $\|x\| := |x_1 + x_2| + |x_3|$, b) $\|x\| := |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3|$,
c) $\|x\| := |x_1| + |x_2 x_3|$, d) $\|x\| := |x_1|^{1/2} + |x_2|^{1/2} + |x_3|^{1/2}$.

2. a) Sind die Normen $\| \ \|_{\sup}$ und $\| \ \|_{\mathcal{C}^1}$ auf $\mathcal{C}^1[a,b]$ äquivalent?
b) Sind die Normen $\| \ \|_{\sup}$ und $\| \ \|_1$ auf $\mathcal{C}[a,b]$ äquivalent?
c) Impliziert die punktweise Konvergenz auf $\mathcal{C}[a,b]$ die im Mittel? Gilt die umgekehrte Implikation?

3. Es sei $f(x,y) := x$ für $x, y \geq 0$ und $f(x,y) := y$ für $x, y \leq 0$. Man definiere $f(x,y)$ für $xy < 0$ so, dass eine *stetige* Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ entsteht.

4. Man untersuche die folgenden auf $\mathbb{R}^2$ definierten Funktionen auf Stetigkeit:
a) $f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$,
b) $g(x,y) := x f(x,y)$,
c) $h(x,y) :=$ sign$(x+y)\sin(x^2+y^2)$.

5. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Man zeige, dass f partiell stetig und sogar auf jeder Geraden durch den Nullpunkt stetig ist. Ist f im Nullpunkt stetig?

6. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Man zeige die Stetigkeit der folgenden Funktion auf $I^2 = I \times I$:

$$\tilde{\Delta} f : I \times I \to \mathbb{R},\ \tilde{\Delta} f(x,y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}, & y \neq x \\ f'(x), & y = x \end{cases} .$$