UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 4

Abgabe: 02.05.07, 14 Uhr

1. Für die folgenden Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ bestimme man jeweils $\overline{M}, M^o$ und ∂M:
a) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy = 0\}$,
b) $M := \{(x, \cos\frac{1}{x}) \,|\, 0 < x \leq \frac{1}{\pi}\}$,
c) $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2 < \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$,
d) $M := \mathbb{Q}^2$.

2. Es seien X ein metrischer Raum und $M \subseteq X$.
a) Man zeige $M^o = \overline{M^c}^c$.
b) Man zeige, dass M^o stets offen ist und jede in M enthaltene offene Menge umfaßt.

3. Es seien X ein metrischer Raum, $(a_n) \subseteq X$ eine Folge und $M = \{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. Man zeige, dass jeder Häufungs*punkt* von M ein Häufungs*wert* von (a_n) ist. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

4. Es seien $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\},\ p = (2,0)$ und $q = (2,1)$. Man berechne $d_{\overline{M}}(p)$, $d_{\overline{M}}(q)$, $d_M(p)$ und $d_M(q)$ in den Normen $\|\ \|_1,\ \|\ \|_2$ und $\|\ \|_\infty$.

5. Für $k \in \mathbb{N}$ zeige man die Vollständigkeit von $(\mathcal{C}^k[a,b],\ \|\ \|_{\mathcal{C}^k})$.

6. Es sei F ein normierter Raum. Eine Funktion $f : M \to F$ heißt *beschränkt*, falls $f(M)$ in F beschränkt ist. Man zeige:
a) Auf den Vektorraum $\mathcal{B}(M,F)$ aller auf M beschränkten F-wertigen Funktionen wird durch

$$\|f\|_{\sup} := \|f\|_\infty := \|f\|_M := \sup_{x \in M} \|f(x)\|_F$$

eine Norm erklärt, die die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathcal{B}(M,F)$ beschreibt.
b) Ist F vollständig, so gilt dies auch für $(\mathcal{B}(M,F), \|\ \|_{\sup})$.