UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 5

Abgabe: 09.05.07, 14 Uhr

1. Sei $(x_n) \subset X$ eine konvergente Folge im metrischen Raum X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$. Man zeige, dass die Menge $\{x_1, x_2, \dots\} \cup \{x\}$ kompakt ist.

2. Man zeige, dass ein metrischer Raum X genau dann kompakt ist, wenn jede unendliche Menge $M \subseteq X$ einen Häufungspunkt besitzt.

3. Es seien X ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ kompakt. Man zeige, dass auch $A \cap B$ und $A \cup B$ kompakt sind.

4. Es sei X ein metrischer Raum. Die *Distanz* zweier Mengen $A, B \subseteq X$ wird erklärt durch

$$d(A, B) := \inf\{d(x, y) \,|\, x \in A,\ y \in B\}.$$

a) Es seien A abgeschlossen, B kompakt und $A \cap B = \emptyset$. Man zeige $d(A, B) > 0$.
b) Man finde abgeschlossene disjunkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $d(A, B) = 0$.

5. a) Gegeben sei die Linearform $\delta \ :\ f \mapsto f(0)$ auf $\mathcal{C}^1[-1, 1]$. Man entscheide, ob δ stetig bezüglich der Normen $\|\ \|_{\sup}, \|\ \|_1, \|\ \|_2, \|\ \|_{\mathcal{C}^1}$ ist und berechne ggf. $\|\delta\|$.
b) Gegeben seien verschiedene Punkte $x_1, \dots, x_r \in [a, b]$ sowie Zahlen $c_1, \dots, c_r \in \mathbb{K}$. Man berechne die Norm von $\sum\limits_{k=1}^{r} c_k \delta_{x_k} \in (\mathcal{C}[a, b])'$.

6. Berechnen Sie die Norm der folgenden linearen Abbildungen auf $\mathcal{C}[a, b]$:
a) $T_1 \ :\ f \mapsto a \cdot f$ für eine Funktion $a \in \mathcal{C}[a, b]$.
b) $T_2 \ :\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b k(x) f(x) dx$ für eine Funktion $k \in \mathcal{C}[a, b]$.