UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 6

Abgabe: 16.05.07, 14 Uhr

1.Man zeige, dass die folgenden Mengen paarweise nicht homöomorph sind: [0,1], $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ xy = 0\}$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$, $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

2. a) Es seien E ein normierter Raum und $M \subseteq E$. Man zeige, dass $\Gamma(M) := \{\sum_{k=1}^{r} t_k x_k \mid x_k \in M,\ t_k \in [0,1],\ \sum_{k=1}^{r} t_k = 1\}$ die kleinste konvexe Obermenge von M ist, die *konvexe Hülle* von M.
b) Für $x_1, \ldots, x_r \in E$ zeige man, dass $\Gamma(\{x_1, \ldots, x_r\})$ kompakt ist.
c) Für eine beschränkte Teilmenge M von E zeige man, dass $\Gamma(M)$ ebenfalls beschränkt ist.

3. Man berechne die Längen der folgenden, in Polarkoordinaten angegebenen Wege:
a) $r = a\phi;\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ a > 0$ fest (Archimedische Spirale),
b) $r = a(1+\cos\phi);\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ a > 0$ fest (Kardioide).

4. Man berechne $F(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t}\, dt$ für $x \geq 0$.

5. Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein *Zeitintervall* und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein *Raumgebiet*; Punkte aus $D \times I \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ werden mit (x,t) bezeichnet, und es sei $r = |x|$.
a) Die partielle Differentialgleichung $\Delta_x f - \frac{1}{k}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ heißt *Wärmeleitungsgleichung* ($k > 0$ ist die Temperaturfähigkeit). Man zeige, dass $T(x,t) := t^{-n/2}\exp(-\frac{r^2}{4t})$ eine bezüglich der Raumvariablen rotationssymmetrische Lösung auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ ist.
b) Die partielle Differentialgleichung $\Delta_x f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ heißt *Schwingungsgleichung* oder *Wellengleichung* ($c > 0$ ist die Wellen-Ausbreitungsgeschwindigkeit). Man zeige, dass $W(x,t) := \frac{\cos(r-ct)}{r}$ für $n = 3$ eine bezüglich der Raumvariablen rotationssymmetrische Lösung auf $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ ist.

6. Man zeige $Arg \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\})$.