UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 7

Abgabe: 23.05.07, 14 Uhr

1. a) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ total differenzierbar. Man zeige, dass auch $f + g$ und $f \cdot g$ in a total differenzierbar sind. Wie lautet die Produktregel?
b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Man zeige, dass die Abbildungen $(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_\nu)$ für $\nu = 1, \dots, n$ auf $\mathbb{R}^n$ total differenzierbar sind.

2. Für die Determinante det :$(\mathbb{R}^n)^n \mapsto \mathbb{R}$ zeige man
det'$(a_1, \dots, a_n)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{j=1}^n$ det $(a_1, \dots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \dots a_n)$ $(a_i, h_j \in \mathbb{R}^n)$.
Für Funktionen $a_j \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ berechne man $\frac{d}{dt}$det$(a_1(t), \dots, a_n(t))$.

3. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(D \times (a, b))$ und $\phi, \psi \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ mit $a < \phi(x) \leq \psi(x) < b$ für $x \in D$. Für die Funktion

$$F : D \to \mathbb{R},\ F(x) := \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy$$

zeige man mithilfe der Kettenregel

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dy + f(x, \psi(x)) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x) - f(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x).$$

4. Für die folgenden Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$ berechne man die Tangentialkegel $T_q(M)$ in allen Punkten $q \in M$:
a) $M = \{(x, y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$,
b) $M = \{(x, y) \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

5. Für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$ zeige man die Existenz aller Richtungsableitungen im Nullpunkt. Gilt dabei die Formel $\partial_v f(0, 0) = Df(0, 0)v$ für $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$? Ist f stetig oder sogar total differenzierbar im Nullpunkt?

6. Es seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^m$ auf G total differenzierbar mit $f' = 0$. Man zeige, dass f konstant ist.