UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 8

Abgabe: 30.05.07, 14 Uhr

1. Man berechne die lokalen Extremalstellen der folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}^2$:
a) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$,
b) $g(x,y) = (4x^2 + y^2)\exp(-x^2 - 4y^2)$.

2. Es seien $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Man bestimme das Minimum der Funktion $f(x) := \sum\limits_{k=1}^{r} |x - a_k|^2$ auf $\mathbb{R}^n$.

3. Gegeben seien n Paare von Meßwerten $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$. Man bestimme diejenige Gerade $y = ax + b$ in $\mathbb{R}^2$, für die $\sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2$ minimal wird (*“Methode der kleinsten Quadrate”*).

4. Für das Polynom $P(x,y,z) := xyz$ berechne man die Taylor-Entwicklung für $k = 3$ im Punkt $a = (1, -1, 0)$.

5. Für $f, g \in \mathcal{C}^{|\alpha|}(D)$ zeige man die *Leibniz-Regel*

$$\partial^\alpha (fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} f \partial^\beta g.$$

Schreiben Sie diese Formel explizit für $|\alpha| = 1, 2, 3$ auf.

6. Es sei $P(x) = \sum\limits_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha$ ein homogenes Polynom vom Grad k.
a) Man zeige, $\partial^\beta P(x) = \beta! c_\beta$ für $|\beta| = k$ und $x \in \mathbb{R}^n$.
b) Aus $P(x) = o(|x|^k)$ für $|x| \to 0$ folgere man $c_\alpha = 0$ für alle α.
c) Man schließe, dass es für $f \in \mathcal{C}^k(D, \mathbb{R})$ und $a \in D$ genau ein Polynom P vom Grad k mit $f(a+h) = P(h) + o(|h|^k)$ gibt.