UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 9

Abgabe: 6.06.07, 14 Uhr

1. Gegeben sei das Polynom $P(x, y) := (y - x^2)(y - 3x^2)$ auf $\mathbb{R}^2$.
a) Man berechne DP und zeige, dass $(0, 0)$ der einzige kritische Punkt von P ist.
b) Man zeige, dass $HP(0, 0)$ semidefinit ist und dass P kein lokales Extremum in $(0, 0)$ besitzt.
c) Man zeige, dass für alle $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Funktion $\phi_h : t \mapsto P(th_1, th_2)$ in 0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt.

2. Für die Polarkoordinaten-Abbildung $\Psi : (r, \phi) \mapsto (r \cos \phi, r \sin \phi)$ berechne man det$D\Psi(r, \phi)$. Wo ist Ψ ein lokaler $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus? Für $r^2 = x^2 + y^2 > 0$ berechne man $(D\Psi(r, \phi))^{-1}$ und $D\Psi^{-1}(x, y)$.

3. Die *elementarsymmetrischen Polynome* in 3 Variablen sind gegeben durch

$$\sigma_1 = t_1 + t_2 + t_3, \quad \sigma_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3, \quad \sigma_3 = t_1t_2t_3.$$

Wo ist die Abbildung $\sigma : (t_1, t_2, t_3) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ein lokaler $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus?

4. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f \in \mathcal{C}(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$, so dass $f|_D \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ gilt und alle $f'(x),\ x \in D$, invertierbar sind. Man zeige, dass $\|f\|$ sein Maximum nicht in D annehmen kann und folgere

$$\sup_{x \in \bar{D}} \|f(x)\| = \sup_{x \in \partial D} \|f(x)\|.$$

5. Für einen *stetigen Kern* $\sigma \in \mathcal{C}([a, b]^2)$ wird ein *Integraloperator* auf $\mathcal{C}[a, b]$ durch $Kf(x) = \displaystyle\int_a^b \sigma(x, y)f(y)dy$ definiert. Man zeige

$$\|K\| \le \sup_{a \le x \le b} \int_a^b |\sigma(x, y)|dy \le (b - a)\|\sigma\|$$

und schließe, dass für $|\lambda| > \|K\|$ die *Integralgleichung*

$$\lambda f(x) - \int_a^b \sigma(x, y)f(y)dy = g(x)$$

für jede stetige Funktion $g \in \mathcal{C}[a, b]$ genau eine Lösung $f = (\lambda I - K)^{-1}g$ in $\mathcal{C}[a, b]$ besitzt.