UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 10

Abgabe: 13.06.07, 14 Uhr

1. Man zeige, dass die Gleichung

$$f(x,y) := e^{\sin xy} + x^2 - 2y - 1 = 0$$

nahe $(0,0)$ nach y aufgelöst werden kann. Für die Auflösung $y = g(x)$ berechne man $g'(0)$ und $g''(0)$.

2. Man berechne alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen der Auflösungen nahe $a := (1,1,1)$ der Gleichung

$$f(x,y,z) := x^2 + y^2 - (z-1)^3 - 2 = 0$$

nach x und y in $(1,1)$. Weiter zeige man, dass diese nahe a auch nach z auflösbar, aber in $(1,1)$ nicht differenzierbar ist.

3. Man zeige, dass der Satz über implizite Funktionen den über inverse Funktionen impliziert.

4. Für die Funktion $u(x,y) := 3xy^2 - x^3 + 4x^2 + 4y^2$ bestimme man alle lokalen Extrema auf der Kreislinie S^1
a) durch Auflösen der Nebenbedingung $x^2 + y^2 - 1 = 0$ nach y,
b) mithilfe eines Lagrange-Multiplikators,
c) mithilfe der Parametrisierung $t \mapsto (\cos t, \sin t)^T$ von $\mathbb{R}$ auf S^1.

5. Man bestimme alle lokalen Extrema von $u(x,y,z) := 5x + y - 3z$ unter den Nebenbedingungen $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

6. Für die Funktion $u(x_1, \dots x_n) := (x_1 \cdots x_n)^2$ berechne man das Maximum auf der Sphäre S^{n-1}. Man folgere die Ungleichung

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \le \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \ \text{ für } \ x_1, \dots, x_n > 0$$

zwischen *geometrischem* und *artithmetischem Mittel*.