UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 11

Abgabe: 20.06.07, 14 Uhr

1. a) Man zeige, dass eine Funktion $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$ genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists u, t \in \mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})\ :\ u \le f \le t,\ \int_a^b (t-u)(x)dx < \varepsilon.$$

b) Man zeige, dass die Funktion $x \mapsto \cos\frac{1}{x}\chi_{(0,1]}(x)$ in $\mathcal{R}_0[0,1] \setminus \mathcal{R}[0,1]$ liegt.

2. a) Für die Dirichlet-Funktion

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

zeige man $D \notin \mathcal{R}_0[0,1]$.
b) Es seien $M \subseteq [a,b]$ endlich und $f \in \mathcal{B}[a,b]$ in jedem Punkt aus $[a,b] \setminus M$ stetig. Man beweise $f \in \mathcal{R}_0[0,1]$ und versuche, dies auch für gewisse unendliche Mengen M zu zeigen.

3. Man berechne die folgenden Integrale:
a) $\displaystyle\int_{[1,2]^2} e^{x+y} d(x,y)$,

b) $\displaystyle\int_{[0,1]^3} \frac{x^2 z^3}{1+y^2} d(x,y,z)$.

4. Man bestimme das Volumen
a) des Paraboloids $P := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1 - \dfrac{x^2+y^2}{R^2}\}$,
b) des Kegels $K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le h,\ x^2+y^2 \le R^2 \left(1 - \dfrac{z}{h}\right)^2\}$.

5. Es sei $f \in \mathcal{C}[a,b]$ mit $f(x) > 0$ für $x \in [a,b]$. Man zeige

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right) \ge (b-a)^2.$$

Hinweis: Man schreibe die linke Seite in der Form

$$\int_a^b \int_a^b \frac{f(x)}{f(y)} d(x,y) = \frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right) d(x,y).$$