UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 12

Abgabe: 27.06.07, 14 Uhr

1. Für die Funktionen $f_\alpha : x \mapsto x^{-\alpha}\chi_{(0,1)}$ und $g_\alpha : x \mapsto x^{-\alpha}\chi_{(1,\infty)}$ betrachte man die rotationssymmetrischen Funktionen $x \mapsto f_\alpha(|x|)$ und $x \mapsto g_\alpha(|x|)$ auf $\mathbb{R}^2$. Für welche $\alpha > 0$ liegen diese in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^2)$?
Hinweis: Man benutze die Formeln für Kreisflächen analog zu Beispiel 44.5. b).

2. Zu $N \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$ gebe es eine Folge (Q_k) kompakter Quader in $\mathbb{R}^n$ mit $N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| < \varepsilon$. Man zeige $N \in \mathfrak{N}(\mathbb{R}^n)$.

3.Man zeige, dass die folgenden Mengen in $\mathfrak{N}(\mathbb{R}^2)$ liegen:
a) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, b) $\{tv \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ für Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$,
c) $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ für stetige Funktionen $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

4. Man zeige, dass eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine λ=Nullmenge ist, wenn eine Folge $(\phi_k) \subseteq \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\phi_k) < \infty$ und $N \subseteq D := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x) = \infty\}$.

5. Man zeige a) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin^n x \, dx = 0$, b) $\lim_{r\to\infty} \int_0^1 r e^{(x^2-1)r^2} \, dx = 0$.

6. Man berechne $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \frac{1}{\sqrt{x}} (1 - \frac{x}{n})^n \, dx$.