UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 13

Abgabe: 03.07.07, 14 Uhr

1. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktionenfolge $f_n(x) := n^\alpha x^n(1-x)$ auf $[0,1]$ gegeben. Wann gilt $\|f_n\|_{\sup} \to 0$, wann ist $(\|f_n\|_{\sup})$ beschränkt, und wann besitzt (f_n) eine $\mathcal{L}_1$-Majorante?

2. Es sei $F(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$ für $t \geq 0$.
a) Für $t > 0$ zeige man $F'(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \sin x dx = -\frac{1}{1+t^2}$. Man schließe $F(t) = C - \arctan t$ und $C = \frac{\pi}{2}$ mittels $t \to \infty$.
b) Man zeige die Stetigkeit von f in 0 und schließe $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

3. Es sei $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $f(x) \neq 0$ λ-f.ü.. Man zeige $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

4. Zu $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ konstruiere man $\alpha \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $|\alpha| = 1$ und $f = \alpha|f|$.

5. Für eine Folge $(f_n) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ zeige man auch $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, falls diese Ausdrücke λ-fast überall existieren.

6. Es sei (A_k) eine Folge in $\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum_{k=1}^\infty m(A_k) < \infty$. Man zeige, dass λ-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ in nur *endlich vielen* A_k liegen.

7. Gilt $m_\lambda(\bar{D}) = m_\lambda(D)$ für offene Mengen $D \subseteq \mathbb{R}^n$?