UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Winfried Kaballo

Übungsaufgaben Analysis II, Blatt 14
Ferienblatt

1. Man zeige, dass eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ genau dann Lebesgue-meßbar ist, wenn für alle Quadern $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt: $m^*(Q) = m^*(Q \cap A) + m^*(Q \setminus A)$.

2. Für $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ definiere $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Man zeige, dass F gleichmäßig stetig ist.

3. Man zeige, dass $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lebesgue-Nullmenge ist, wenn eine Folge (W_k) von offenen Würfeln mit $\sum_{k=1}^{\infty} m(W_k) < \infty$ existiert, so dass jeder Punkt $x \in N$ in unendlich vielen dieser Würfel enthalten ist.

4. Man berechne $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 y^2 \sin \frac{2\pi x}{y} dy dx$.

5. Man untersuche, ob folgende Funktionen über die angegebenen Mengen integrierbar sind.
a) $f(x,y) = (2 - xy)xye^{-xy}$ über $[0,1] \times [0,\infty)$,
b) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ über $[0,1]^2$,
c) $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ über $[-1,1]^2$.

6. Man berechne die Schwerpunkte der folgenden Mengen:
a) einer Halbellipse $A = \{(x,y) \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ y \geq 0\}$,
b) eines Kegels $C = \{(x,y,z) \,|\, z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq R^2(1 - \frac{z}{h})^2\}$.

7. Für eine symmetrische und positiv definite Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ beweise man mithilfe der Transformationsformel: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x,Ax\rangle} d^n x = \pi^{n/2} (\det A)^{-1/2}$.