Musterlösung zu Blatt 1

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

1 a) **1. Möglichkeit:**

Nach 19.11 c) der Vorlesung gilt $\log x \leq x - 1$ für $x \geq 1$, und für $1 < a \leq 2$ folgt damit:

$$\int_a^2 \frac{dx}{\log x} \geq \int_a^2 \frac{dx}{x-1} = \log(x-1)\Big|_a^2 = -\log(a-1) \underset{a \to 1}{\longrightarrow} \infty$$

Somit divergiert das Integral.

2. Möglichkeit:

Für $x > 1$ ist

$$\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{x \log x}$$

und für $1 < a \leq 2$ folgt damit:

$$\int_a^2 \frac{dx}{\log x} \geq \int_a^2 \frac{dx}{x \log x} = \log\log x\Big|_a^2 = \log\log 2 - \log\log a \underset{a \to 1}{\longrightarrow} \infty$$

Somit divergiert das Integral.

b) Es gilt $\sin x \leq x$ für $x \geq 0$, denn

$$\sin 0 = 0 \quad \text{und} \quad (\sin x)' = \cos x \leq 1 = x'$$

(siehe auch Analysis I). Für $b \geq 1$ folgt damit:

$$\int_1^b \sin^2 \frac{1}{x}\, dx \leq \int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b} < 1$$

Mit Satz 21.4 folgt die Konvergenz des Integrals.

c) Das Integral konvergiert.

1. Möglichkeit:

Zweifache partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2 e^{-x}\, dx &= -x^2 e^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b (-2xe^{-x})\, dx \\
&= -b^2 e^{-b} + 2\left(-xe^{-x}\Big|_0^b - \int_0^b (-e^{-x})\, dx\right) \\
&= -b^2 e^{-b} - 2be^{-b} - 2(e^{-b} - 1) \\
&= 2 - (b^2 + 2b + 2)e^{-b} \\
&\to 2
\end{aligned}$$

für $b \to \infty$, da die Exponentialfunktion schneller gegen unendlich geht als jedes Polynom.

2. Möglichkeit:

Es existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass

$$\frac{x^2}{e^x} \;\leq\; \frac{1}{x^2} \qquad \text{für } x \geq M$$

gilt, denn mehrmaliges Anwenden der Regel von de l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^4} \;=\; \infty \qquad \text{und somit} \qquad x^4 \;\leq\; e^x \quad \text{für } x \geq M.$$

Diese Abschätzung liefert:

$$\int_M^{\uparrow\infty} \frac{x^2}{e^x}\,dx \;\leq\; \int_M^{\uparrow\infty} \frac{dx}{x^2} \;=\; -\frac{1}{x}\Big|_M^{\uparrow\infty} \;=\; \frac{1}{M}$$

Mit

$$\int_0^{\uparrow\infty} x^2 e^{-x}\,dx \;=\; \int_0^{M} x^2 e^{-x}\,dx + \int_M^{\uparrow\infty} x^2 e^{-x}\,dx$$

folgt die Konvergenz des Integrals.

2 Das Integral über das Produkt der beiden Funktionen konvergiert im Allgemeinen nicht. Betrachte zum Beispiel den Fall $f(x) = g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Das Integral

$$\int_{0\downarrow}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; 2\sqrt{x}\,\Big|_{0\downarrow}^{1} \;=\; 2$$

konvergiert (sogar absolut), aber

$$\int_{0\downarrow}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int_{0\downarrow}^{1} \frac{1}{x}\,dx \;=\; \log x\,\Big|_{0\downarrow}^{1} \;=\; \infty$$

divergiert.

Bemerkung: Das Konvergenzverhalten von $\int_{0\downarrow}^{1} \frac{dx}{x^\alpha}$ wurde bereits in 21.3 der Vorlesung untersucht. Daher ist die Konvergenz bzw. Divergenz obiger Integrale bereits bekannt.

3 Sei $x_0 \in (\infty, b]$. Teile das Intervall an einer Stelle, die kleiner als x_0 ist, und entsprechend auch das Integral auf, zum Beispiel:

$$F(x) \;=\; \underbrace{\int_{-\infty}^{x_0-1} f(t)\,dt}_{=:\,C} + \underbrace{\int_{x_0-1}^{x} f(t)\,dt}_{=:\,G(x)} \;=\; G(x) + C$$

Auf die Funktion G läßt sich der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Theorem 18.4) anwenden. Somit ist G in x_0 stetig differenzierbar mit $G'(x_0) = f(x_0)$. Es folgt sofort, dass F in x_0 stetig differenzierbar ist mit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Also ist $F \in \mathcal{C}^1(-\infty, b]$ mit $F' = f$.

Bemerkung: Die Aussage läßt sich auch ohne die Anwendung von Theorem 18.4 beweisen, indem der Beweis des Theorems für die Situation der Aufgabenstellung durchgeführt wird. Der Beweis läßt sich nahezu wörtlich übertragen. Es kann natürlich auch der Differenzenquotient untersucht werden.

4 Suche zunächst die Nullstellen des Nenners. Wenn ganzzahlige Nullstellen existieren, so sind diese Teiler des konstanten Summanden 9. Ausprobieren liefert zum Beispiel, dass 3 Nullstelle des Nenners ist. Polynomdivision des Nenners durch $x-3$ liefert ein quadratisches Polynom, dessen Nullstellen leicht ermittelt werden können. Es ergibt sich so:

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 \;=\; (x+1)(x-3)^2$$

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{9x^2 - 35x + 36}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} \;=\; \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2}$$

Für die rechte Seite gilt:

$$\begin{aligned}\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} &= \frac{A(x-3)^2 + B(x+1)(x-3) + C(x+1)}{(x+1)(x-3)^2} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (-6A - 2B + C)x + 9A - 3B + C}{(x+1)(x-3)^2}\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich des Zählers mit dem Zähler des Bruchs aus der Aufgabenstellung führt auf ein lineares Gleichungssystem:

$$A + B \;=\; 9 \quad\wedge\quad -6A - 2B + C \;=\; -35 \quad\wedge\quad 9A - 3B + C \;=\; 36$$

Die eindeutig bestimmte Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist gegeben durch $A = 5,\ B = 4,\ C = 3$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung ist also:

$$\frac{9x^2 - 35x + 36}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9} \;=\; \frac{5}{x+1} + \frac{4}{x-3} + \frac{3}{(x-3)^2}$$

Das gesuchte Integral läßt sich nun leicht berechnen:

$$\begin{aligned}\int \frac{9x^2 - 35x + 36}{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}\,dx &= \int \frac{5}{x+1}\,dx + \int \frac{4}{x-3}\,dx + \int \frac{3}{(x-3)^2}\,dx \\ &= 5\log|x+1| + 4\log|x-3| - \frac{3}{x-3}\end{aligned}$$

sawo