Musterlösung zu Blatt 2

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

5 a) Wegen $|\cos x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt sofort

$$\int_{\pi}^{\uparrow\infty} \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \;\leq\; \int_{\pi}^{\uparrow\infty} \frac{dx}{x^2} \;<\; \infty$$

nach Beispiel 21.3 d). Also konvergiert das Integral absolut.

b) Partielle Integration liefert:

$$\int_{\pi}^{\uparrow\infty} \frac{\cos x}{x}\, dx \;=\; \underbrace{\frac{\sin x}{x}\Big|_{\pi}^{\uparrow\infty}}_{=0} + \int_{\pi}^{\uparrow\infty} \frac{\sin x}{x^2}\, dx$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert (sogar absolut), was wie in Teil a) gezeigt werden kann, und somit konvergiert auch das Integral auf der linken Seite.

Bemerkung: Das Integral konvergiert nicht absolut. Dies läßt sich genauso wie in Beispiel 25.26 der Vorlesung zeigen, wo die Sinus- anstelle der Kosinusfunktion steht. Es müssen lediglich die Intervalle $[(k-1)\pi, k\pi]$ durch $\left[\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi, \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$ ersetzt werden.

c) Beh.: **1)** Konvergiert $\int_{\pi}^{\uparrow\infty} f(x)\, dx$ absolut, so auch $\int_{\pi}^{\uparrow\infty} f(x) \cos x\, dx$.

2) Ist $f \in \mathcal{C}^1[\pi, \infty)$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\int_{\pi}^{\uparrow\infty} f'(x)\, dx$ absolut konvergent, so konvergiert $\int_{\pi}^{\uparrow\infty} f(x) \cos x\, dx$.

Bew.:

zu 1) Wegen $|\cos x| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt sofort

$$\int_{\pi}^{\uparrow\infty} |f(x) \cos x|\; dx \;\leq\; \int_{\pi}^{\uparrow\infty} |f(x)| \;<\; \infty$$

nach Voraussetzung. Also konvergiert $\int_{\pi}^{\uparrow\infty} f(x) \cos x\, dx$ absolut.

zu 2) Partielle Integration liefert

$$\int_{\pi}^{\uparrow\infty} f(x) \cos x\, dx \;=\; \underbrace{f(x) \sin x\Big|_{\pi}^{\uparrow\infty}}_{=0} - \int_{\pi}^{\uparrow\infty} f'(x) \sin x\, dx\,,$$

wobei $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \sin x = 0$, da der Sinus beschränkt ist, und mit

$$\left|\int_{\pi}^{\uparrow\infty} f'(x) \sin x\, dx\right| \;\leq\; \int_{\pi}^{\uparrow\infty} |f'(x)| \cdot \underbrace{|\sin x|}_{\leq 1}\, dx \;\leq\; \int_{\pi}^{\uparrow\infty} |f'(x)|\, dx \;<\; \infty$$

folgt die Behauptung.

6 a) 1. Möglichkeit:

Für $y :=$ Arcosh x ist

$$\begin{aligned} x &= \cosh y = \tfrac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \\ \Leftrightarrow\quad 2xe^y &= e^{2y} + 1 \\ \Leftrightarrow\quad e^{2y} - 2xe^y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow\quad e^y &= x \pm \sqrt{x^2-1} \\ \Leftrightarrow\quad e^y &= x + \sqrt{x^2-1}\,, \end{aligned}$$

denn zum einen gilt wegen $x \geq 1$ sicherlich $e^y \geq 1$, und zum anderen ist

$$x - \sqrt{x^2-1} \;\leq\; 1 \quad\Leftrightarrow\quad x \;\leq\; 1 + \sqrt{x^2-1} \quad\Leftrightarrow\quad x^2 \;\leq\; 1 + 2\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1$$

immer erfüllt, wobei Gleichheit jeweils nur für $x = 1$ gilt (dann fallen beide Lösungen der quadratischen Gleichung zusammen). Es folgt unmittelbar

$$y = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

und somit die Behauptung.

2. Möglichkeit:

Für $x = 1$ gilt:

$$\text{Arcosh } 1 = 0 = \log\left(1 + \sqrt{1^2-1}\right)$$

Berechne nun die Ableitungen der beiden Funktionen. Für $x > 1$ ist

$$(\text{Arcosh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

und

$$\left(\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

d.h.

$$(\text{Arcosh } x)' = \left(\log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\right)'.$$

Also sind die beiden Funktionen identisch.

b) 1. Möglichkeit:

Für $y :=$ Artanh x ist

$$\begin{aligned} x &= \tanh y = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1} \\ \Leftrightarrow\quad xe^{2y} + x &= e^{2y} - 1 \\ \Leftrightarrow\quad (x-1)e^{2y} &= -x - 1 \\ \Leftrightarrow\quad e^{2y} &= \frac{1+x}{1-x} \\ \Leftrightarrow\quad y &= \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

2. Möglichkeit:

Für $x = 0$ gilt:

$$\text{Artanh}\ 0 \;=\; 0 \;=\; \frac{1}{2}\log\frac{1+0}{1-0}$$

Berechne nun die Ableitungen der beiden Funktionen. Für $|x| < 1$ ist

$$(\text{Artanh}\ x)' \;=\; \frac{1}{1-x^2}$$

und

$$\left(\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right)' \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} \;=\; \frac{1}{(1+x)(1-x)} \;=\; \frac{1}{1-x^2}$$

d.h.

$$(\text{Artanh}\ x)' \;=\; \left(\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}\right)' .$$

Also sind die beiden Funktionen identisch.

Bemerkung: Die Ableitungen der Area-Funktionen lassen sich aus den Gleichungen in 22.12 herleiten. Tut man dies, so macht die 2. Lösungsmöglichkeit natürlich nicht viel Sinn. Die Ableitungen lassen sich allerdings auch ohne 22.12 mit Hilfe von Satz 13.6 (Ableitung der Umkehrfunktion) berechnen.

7 Die Substitution $x := \sinh t$ ergibt:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \;=\; \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\cosh t\,dt \;=\; \int \cosh^2 t\,dt$$

Partielle Integration liefert (wie bei der Integration von $\cos^2 t$)

$$\begin{aligned}\int \cosh^2 t\,dt \;&=\; \frac{1}{2}(\sinh t\cosh t + t)\\ &=\; \frac{1}{2}\left(\sinh t\sqrt{1+\sinh t} + t\right)\\ &=\; \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \text{Arsinh}\,x\right)\end{aligned}$$

und somit:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \text{Arsinh}\,1\right)$$

Unter Verwendung der Identitität

$$\text{Arsinh}\ x \;=\; \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

läßt sich das Ergebnis auch schreiben als

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \log\left(1+\sqrt{2}\right)\right) .$$

8 Die Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$ ergibt nach 22.7 b):

$$\int \frac{1}{\sin x + \cos x}\,dx \;=\; \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \;=\; \int \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt$$

1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt &= -2\int \frac{1}{t^2-2t-1}\,dt \\
&= -2\int \frac{1}{(t-1-\sqrt{2})\,(t-1+\sqrt{2})}\,dt \\
&\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\int \left(\frac{1}{t-1+\sqrt{2}} - \frac{1}{t-1-\sqrt{2}}\right)\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left|\,t-1+\sqrt{2}\,\right| - \log\left|\,t-1-\sqrt{2}\,\right|\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\left|\,\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\,\right| - \log\left|\,\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\,\right|\right)
\end{aligned}$$

Beachte bei $(*)$, dass allgemein gilt:

$$\frac{1}{(t-a)(t-b)} \;=\; \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t-b}\right)$$

2. Möglichkeit:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{2t+1-t^2}\,dt &= \int \frac{2}{2-(t-1)^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{1-\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt \\
&= \sqrt{2}\int \frac{1}{1-z^2}\,dz \qquad \left(\text{mit } z := \frac{t-1}{\sqrt{2}} \text{ und } \frac{dz}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \sqrt{2}\cdot\begin{cases} \operatorname{Artanh} z & \text{falls } |z|<1 \\ \operatorname{Arcoth} z & \text{falls } |z|>1 \end{cases} \\
&= \sqrt{2}\cdot\begin{cases} \operatorname{Artanh} \frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}} & \text{falls } \left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}}\right|<1 \\ \operatorname{Arcoth} \frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}} & \text{falls } \left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}}\right|>1 \end{cases}
\end{aligned}$$

sawo