

# Musterlösung zu Blatt 3

## Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

9 a) Die Ableitung  $f'(x) = e^x$  ist auf dem Definitionsintervall beschränkt, denn es gilt

$$|f'(x)| \leq 1 \quad \text{für alle } x \in (-\infty, 0].$$

Nach Satz 23.4 ist  $f$  gleichmäßig stetig.

b)  $g$  ist nicht gleichmäßig stetig, denn:

Definiere Folgen  $(x_n), (y_n) \subseteq (0, 1)$  durch

$$x_n := \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad y_n := \frac{1}{2n}$$

für  $n \geq 2$  (für  $n = 1$  ist  $x_n \notin (0, 1)$ ). Dann gilt

$$|x_n - y_n| = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ , aber

$$|\log x_n - \log y_n| = \left| \log \frac{x_n}{y_n} \right| = \log 2$$

geht nicht gegen 0. Nach Satz 23.3 ist somit  $g$  nicht gleichmäßig stetig.

**Bemerkung:** Es läßt sich auch die Umkehrung von Folgerung 23.7 (siehe Bemerkung nach 23.7) anwenden:  $g$  ist nicht gleichmäßig stetig, da  $g(0^+)$  nicht existiert. Der Beweis der Umkehrung folgt aber erst später aus der Vorlesung mit Hilfe der Cauchy-Folgen.

10  $f + g$  ist gleichmäßig stetig, denn:

Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung existieren  $\delta_1 > 0$  und  $\delta_2 > 0$ , so dass für alle  $x \in I$  gilt:

$$\begin{aligned} |x - y| < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \\ |x - y| < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Definiere  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ . Für  $x, y \in I$  mit  $|x - y| < \delta$  folgt dann:

$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \varepsilon$$

Also ist  $f + g$  gleichmäßig stetig.

$f \cdot g$  ist im Allgemeinen nicht gleichmäßig stetig, denn:

Betrachte  $f(x) = g(x) = x$  für  $x \in \mathbb{R}$ .  $f$  und  $g$  sind gleichmäßig stetig (nach Beispiel 23.5 a) oder einfach nach Definition mit  $\delta := \varepsilon$ ), aber  $(f \cdot g)(x) = x^2$  nach Beispiel 23.5 c) nicht.

**Bemerkung:** Mit Hilfe von Folgerung 23.7 (und deren Umkehrung) läßt sich zeigen, dass  $f \cdot g$  gleichmäßig stetig ist, falls  $I$  ein beschränktes Intervall ist.

11 Im folgenden werden sämtliche Reihen als  $\sum a_k$  mit passenden Grenzen für  $k$  geschrieben.

a) Das Wurzelkriterium liefert

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{k+1}{2^k}} = \frac{\sqrt[k]{k+1}}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2},$$

denn es gilt:

$$1 \xleftarrow{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} \leq \sqrt[k]{k+1} \leq \sqrt[k]{2k} = \sqrt[k]{2} \cdot \sqrt[k]{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1$$

Also konvergiert die Reihe (absolut).

b) Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \cdot \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

Also divergiert die Reihe, da eine divergente Minorante existiert.

**Bemerkung:** Wurzel- und Quotientenkriterium liefern hier keine Aussage.

c) Das Quotientenkriterium liefert:

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{((k+1)!)^2 / (2k+2)!}{(k!)^2 / (2k)!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{(1 + \frac{1}{k})^2}{(2 + \frac{2}{k})(2 + \frac{1}{k})} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4}$$

Also konvergiert die Reihe (absolut).

d) Das Leibnizkriterium liefert die Konvergenz der Reihe, da die Logarithmusfunktion monoton steigend gegen  $\infty$  geht und daher die Funktion  $k \mapsto \frac{1}{\log k}$  eine monoton fallende Nullfolge ist. (Wegen  $\log k \leq k$  und somit  $\frac{1}{\log k} \geq \frac{1}{k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  konvergiert die Reihe aber nicht absolut, da sie eine divergente Minorante besitzt.)

12 Es gilt:

$$a_n = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 - \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Somit sind  $-1$  und  $3$  offensichtlich die einzigen Häufungswerte, und es folgt:

$$\liminf a_n = -1 \quad \text{und} \quad \limsup a_n = 3$$

sawo