Musterlösung zu Blatt 4

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

13 Nein! Gegenbeispiele:

$$a_n \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{oder} \qquad a_n \;:=\; \log n \qquad \text{oder} \qquad a_n \;:=\; \sqrt{n}$$

Beachte bei letzterem Beispiel, dass gilt:

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| \;=\; \left|\frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \;=\; \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \;\longrightarrow\; 0$$

für $n \to \infty$.

Bemerkung: Die Aussage gilt auch nicht, falls (a_n) zusätzlich beschränkt ist (siehe Lösung zu Aufgabe 6.4 in *Einführung in die Analysis I* von W. Kaballo).

14 **zu zeigen:** $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N_0 \in \mathbb{N}\; \forall m, n \geq N_0\colon\; |a_m - a_n| < \varepsilon$

Sei also $\varepsilon > 0$. Sind dann $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq \ell$ und $m > n$, so folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| \;&\leq\; |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leq\; C \cdot \frac{1}{(m-1)^2} + C \cdot \frac{1}{(m-2)^2} + \ldots + C \cdot \frac{1}{n^2} \\
&=\; C \cdot \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} \\
&=\; C \cdot \left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right) \\
&=\; C \cdot |s_{m-1} - s_{n-1}|
\end{aligned}$$

mit $s_p := \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2}$ für $p \in \mathbb{N}$. Da die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, ist die Folge (s_p) nach Theorem 25.20 eine Cauchy-Folge. Somit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|s_{m-1} - s_{n-1}| \;<\; \frac{\varepsilon}{C}$$

für $m-1, n-1 \geq n_0$. Definiere nun $N_0 := \max\{n_0 + 1, \ell\}$. Dann gilt für alle $m, n \geq N_0$:

$$|a_m - a_n| \;\leq\; C \cdot |s_{m-1} - s_{n-1}| \;<\; C \cdot \frac{\varepsilon}{C} \;=\; \varepsilon$$

15 Nach Satz 24.7 (Integralkriterium) konvergiert die Reihe genau dann, wenn das Integral

$$\int_3^{\uparrow\infty} \frac{1}{x \log x (\log\log x)^\alpha}\, dx$$

konvergiert, denn die Funktion im Integranden ist auf dem Intervall $[3, \infty)$ stetig, positiv und monoton fallend. Substitution von $t := \log\log x$ liefert mit $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x \log x}$:

$$\int_3^{\uparrow\infty} \frac{1}{x \log x (\log\log x)^\alpha}\, dx \;=\; \int_{\log\log 3}^{\uparrow\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \;=\; \begin{cases} \dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Bigg|_{\log\log 3}^{\uparrow\infty} & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ \log t \Bigg|_{\log\log 3}^{\uparrow\infty} & \text{falls } \alpha = 1 \end{cases}$$

Das Integral konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.

16 Da (b_k) beschränkt ist, existiert ein $M > 0$, so dass $|b_k| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, und es folgt:

$$0 \;\leq\; \sum |a_k b_k| \;=\; \sum |a_k| \cdot |b_k| \;\leq\; M \cdot \sum |a_k| \;<\; \infty\,,$$

da die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergiert. Also ist die Reihe $\sum a_k b_k$ ebenfalls absolut konvergent.

$\sum a_k b_k$ konvergiert im Allgemeinen nicht, falls $\sum a_k$ nicht absolut konvergiert. Zum Beispiel konvergiert die Reihe $\sum a_k$ mit $a_k := \frac{(-1)^k}{k}$ nach dem Leibniz-Kriterium. Aber die Reihe $\sum a_k b_k$ mit $b_k := (-1)^k$ ist die harmonische Reihe und somit divergent.

sawo