# Musterlösung zu Blatt 5

## Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

**17 i)** $(f_n)$ konvergiert punktweise, denn es gilt:

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} = \frac{x^{2n}+1-1}{1+x^{2n}} = 1-\frac{1}{1+x^{2n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{falls } |x|<1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } |x|=1 \\ 1 & \text{falls } |x|>1 \end{cases}$$

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da die Grenzfunktion nicht stetig ist (Theorem 27.5).

**ii)** $(g_n)$ konvergiert punktweise, denn es gilt:

$$e^{-nx^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig, da die Grenzfunktion nicht stetig ist (Theorem 27.5).

**iii)** $(h_n)$ konvergiert punktweise gegen die Betragsfuntion $h(x) := |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Konvergenz ist gleichmäßig, denn:

**1. Möglichkeit:**

**zeige:** $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ |h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$

Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gilt:

$$|h_n(x)-h(x)| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\frac{1}{n}+x^2}-|x| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{n}+x^2 < (\varepsilon+|x|)^2$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{1}{n} < \varepsilon^2 + 2\varepsilon|x| \qquad \Leftrightarrow\; n > \underbrace{\frac{1}{\varepsilon^2+2\varepsilon|x|}}_{\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\ \forall x\in\mathbb{R}}$$

Wähle daher $n_0 := \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $|h_n(x) - h(x)| < \varepsilon$ ist.

**2. Möglichkeit:**

**zeige:** $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h_n(x) - h(x)| \to 0$ für $n \to \infty$

Es gilt:

$$0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \sqrt{\frac{1}{n}+x^2} - |x| \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\left(\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}-|x|\right)\left(\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}+|x|\right)}{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}+|x|} \right|$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\frac{1}{n}+x^2-x^2}{\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}+|x|} \right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und somit $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h_n(x) - h(x)| \to 0$ für $n \to \infty$.

**18** **zu zeigen:** $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 \; \forall x \in \mathbb{R}\colon \; |g \circ f_n(x) - g \circ f(x)| < \varepsilon$

Sei also $\varepsilon > 0$. Da $g$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| \; < \; \varepsilon$$

gilt, falls $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ ist. Da $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert, gibt es zu diesem $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| \; < \; \delta$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ ist. Daraus folgt die Behauptung.

**19** Wegen

$$\left| \frac{\sin kx}{2^k} \right| \; \leq \; \frac{1}{2^k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \; = \; \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \; = \; 2 \quad \text{(geometrische Reihe)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum\limits_{k \geq 0} \frac{\sin kx}{2^k}$ nach Satz 27.11 (Weierstraßsches Majorantenkriterium) auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig, und nach Theorem 27.5 ist die Grenzfunktion

$$x \; \mapsto \; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k}$$

stetig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{2^k}$ differenzierbar, und es gilt:

$$\left( \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{2^k} \right)' \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{k \cos kx}{2^k}$$

Wegen

$$\left| \frac{k \cos kx}{2^k} \right| \; \leq \; \frac{k}{2^k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \; < \; \infty \quad \text{(Wurzelkriterium)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert auch die Reihe der Ableitungen auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion. Letztere ist nach Theorem 27.9 (angewendet auf ein geeignetes Intervall um ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$) identisch mit der Ableitung der Ausgangsreihe.

**20 a)** **1. Möglichkeit:**

Es gilt

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \; = \; \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{k^5 \log(k+1) + k^2} \; = \; 1\,,$$

denn es ist

$$1 \; \leq \; \sqrt[k]{k^5 \log(k+1) + k^2} \; \leq \; \sqrt[k]{2k^6} \; = \; \sqrt[k]{2} \cdot \left( \sqrt[k]{k} \right)^6 \; \to \; 1$$

für $k \to \infty$. Also ist der Konvergenzradius $\rho = 1$.

**2. Möglichkeit:**

Es gilt

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{k^5\log(k+1)+k^2}{(k+1)^5\log(k+2)+(k+1)^2} = \frac{1+\frac{1}{k^3\log(k+1)}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^5\frac{\log(k+2)}{\log(k+1)}+\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2}{k^3\log(k+1)}} \longrightarrow 1$$

für $k\to\infty$. Also ist der Konvergenzradius $\rho = 1$.

b) **1. Möglichkeit:**

Es gilt:

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt{3}e^{-1} = \sqrt{3}e^{-1}$$

Also ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{e}{\sqrt{3}}$.

**2. Möglichkeit:**

Es gilt

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{3^{\frac{k}{2}}e^{-k}}{3^{\frac{k+1}{2}}e^{-(k+1)}} = \frac{3^{\frac{k}{2}}e^{-k}}{\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{k}{2}}e^{-1}e^k} = \frac{e}{\sqrt{3}}$$

für alle $k\geq 0$. Also ist der Konvergenzradius $\rho = \frac{e}{\sqrt{3}}$.

c) **1. Möglichkeit:**

Setze $y := x-a$. Nach Voraussetzung konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} a_k y^k$ für $|y|<2$ und divergiert für $|y|>2$. Die Aussage bleibt natürlich auch für $y := (x-a)^m$ richtig. Daher konvergiert die Potenzreihe $\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^{mk}$ für $|x-a|^m < 2 \Leftrightarrow |x-a| < \sqrt[m]{2}$ und divergiert für $|x-a|^m > 2 \Leftrightarrow |x-a| > \sqrt[m]{2}$. Somit ist der Konvergenzradius gleich $\sqrt[m]{2}$.

**2. Möglichkeit:**

Es ist

$$\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^{mk} = \sum_{r\geq 0} b_r(x-a)^r \quad \text{mit } b_r := \begin{cases} a_k & \text{falls } r = mk \text{ für ein } k\geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit Konvergenzradius

$$\limsup_{r\to\infty}\sqrt[r]{|b_r|} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[mk]{|a_k|} = \sqrt[m]{\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}} = \sqrt[m]{2}\,.$$

sawo