Musterlösung zu Blatt 6

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

21 Die Potenzreihenentwicklung des Kosinus in 0 lautet:

$$\cos x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \;=\; 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots$$

Die Reihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ absolut, und sie ist identisch mit der Taylorreihe des Kosinus in 0. Insbesondere ist das Taylorpolynom vom Grad drei

$$T_3^0(\cos)(x) \;=\; 1 - \frac{x^2}{2}\,.$$

Die Lagrange-Form des Restgliedes der Taylorentwicklung einer Funktion f in a ist gegeben durch:

$$R_{m+1}^a(f)(x) \;=\; f^{(m+1)}(\xi)\,\frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} \quad \text{für ein } \xi \in /a, x/$$

Für die Taylorentwicklung des Kosinus in $a = 0$ ergibt sich mit $m = 3$:

$$\left|\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)\right| \;=\; \left|R_4^0(\cos)(x)\right| \;=\; \left|\cos\xi\,\frac{x^4}{4!}\right| \;\leq\; \frac{x^4}{24}$$

22 Nach Definition ist

$$\arcsin x \;=\; \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \;=\; \int_0^x (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt\,.$$

Mit der Binomialentwicklung (28.17)

$$(1+x)^\alpha \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \text{mit} \quad \binom{\alpha}{k} \;=\; \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

für $|x| < 1$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
\arcsin x \;&=\; \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-t^2)^k\,dt \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \int_0^x t^{2k}\,dt \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}
\end{aligned}$$

(unter Anwendung von Satz 27.14 und Theorem 27.6) innerhalb des Konvergenzradius

$$\rho \;=\; \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)(2k+3)}{(\alpha-k)(2k+1)}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(1+\frac{1}{k})(2+\frac{3}{k})}{(\frac{\alpha}{k}-1)(2+\frac{1}{k})}\right| \;=\; 1$$

(mit $\alpha = -\frac{1}{2}$).

23 Wie im Hinweis angegeben gilt

$$\operatorname{Artanh}'(x) \;=\; \frac{1}{1-x^2} \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

für $|x|<1$. Entwickle nun die beiden Summanden in Potenzreihen.

1. Möglichkeit:

Es ist

$$\frac{1}{1+x} \;=\; \frac{1}{1+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)} \;=\; \frac{2}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k\left(x-\frac{1}{2}\right)^k$$

mit Konvergenzradius $\rho_1=\frac{3}{2}$ und

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \frac{1}{1-\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}} \;=\; \frac{2}{1-2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \;=\; 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}2^k\left(x-\frac{1}{2}\right)^k$$

mit Konvergenzradius $\rho_2=\frac{1}{2}$. Insgesamt also

$$\operatorname{Artanh}'(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}+2^k\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^k$$

mit Konvergenzradius $\rho=\min\{\rho_1,\rho_2\}=\frac{1}{2}$ (Satz 27.16). Integration liefert schließlich (unter Anwendung von Satz 27.14 und Theorem 27.6)

$$\operatorname{Artanh}(x) \;=\; a_0+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\frac{(-2)^k}{3^{k+1}}+2^k}{k+1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \;=\; a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{(-2)^{k-1}}{3^k}+2^{k-1}}{k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k$$

mit Konvergenzradius $\rho=\frac{1}{2}$, wobei $a_0=\operatorname{Artanh}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\log 3$ ist.

2. Möglichkeit:

Zeige mittels vollständiger Induktion:

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k)} \;=\; \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} \;=\; \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

für alle $k\in\mathbb{N}_0$. Es folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
\operatorname{Artanh}^{(k)}\left(\tfrac{1}{2}\right) \;&=\; \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^k}+\frac{(k-1)!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^k}\right)\\
&=\; \frac{1}{2}(k-1)!\left((-1)^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k+2^k\right)\\
&=\; (k-1)!\left(\frac{(-2)^{k-1}}{3^k}+2^{k-1}\right)
\end{aligned}$$

für alle $k\in\mathbb{N}$, und der Satz von Taylor (Theorem 28.6) liefert:

$$\operatorname{Artanh}(x) \;=\; \operatorname{Artanh}\left(\tfrac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{(-2)^{k-1}}{3^k}+2^{k-1}}{k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k$$

mit Konvergenzradius $\rho=\frac{1}{2}$, wobei $\operatorname{Artanh}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\log 3$ ist.

24 a) $y(x) = De^{Cx}$ mit $D \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = De^{x^2/2}$ mit $D \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = De^{A(x)}$ mit $D \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ mit $A' = a$

Bemerkung: Dies sind sämtliche Lösungen der Differentialgleichung, denn für jede Lösung f gilt: $x \mapsto f(x)e^{-A(x)}$ ist konstant (Nachrechnen: die Ableitung verschwindet!)

sawo