Musterlösung zu Blatt 7

Analysis II für Lehramt Gymnasium, Sommersemester 2007

25 Untersuche die Ableitungen von f:

$$
\begin{aligned}
& f'(x) \;=\; \cos x + \cos 2x \;=\; \cos x + 2\cos^2 x - 1 \;=\; 0 \\
\Leftrightarrow\;& \cos^2 x + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{2} \;=\; 0 \\
\Leftrightarrow\;& \cos x \;=\; -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{2}} \;=\; -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16}} \;=\; -\tfrac{1}{4} \pm \tfrac{3}{4} \\
\Leftrightarrow\;& \cos x \;=\; \tfrac{1}{2} \quad \text{oder} \quad \cos x \;=\; -1 \\
\Leftrightarrow\;& x \;=\; \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x \;=\; \tfrac{5}{3}\pi + 2k\pi \quad \text{oder} \quad x \;=\; (2k+1)\pi \qquad \text{mit } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Es ist $f''(x) = -\sin x - 2\sin 2x$ und somit:

$$
\begin{aligned}
f''\left(\tfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right) &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} \;<\; 0 \quad \to \text{ lokale Maxima} \\
f''\left(\tfrac{5}{3}\pi + 2k\pi\right) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} \;>\; 0 \quad \to \text{ lokale Minima} \\
f''((2k+1)\pi) &= 0
\end{aligned}
$$

Wegen $f'''(x) = -\cos x - 4\cos 2x$ und somit $f'''((2k+1)\pi) = 1 - 4 \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind bei $(2k+1)\pi$ nach Satz 28.9 keine lokalen Extremstellen.

26 a) Für $z = x + iy \in A_1$ gilt:

$$x^2 + y^2 \;=\; (x-1)^2 + (y-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \;=\; -2x + 1 - 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \;=\; 1 - x$$

A_1 stellt also eine Gerade dar.

b) Für $z = x + iy \in A_2$ gilt:

$$\sqrt{x^2 + y^2} \;=\; y + 1$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung mit $y < -1$. Für $y \geq -1$ ist sie äquivalent zu:

$$x^2 + y^2 \;=\; (y+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \;=\; 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \;=\; \frac{x^2 - 1}{2}$$

Da

$$\frac{x^2 - 1}{2} \;\geq\; -1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \;\geq\; -1$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, stellt A_2 also eine Parabel dar.

c) Für $z = x + iy \in A_3$ gilt:

$$\operatorname{Re}(ix - y) \;\geq\; 1 \quad \Leftrightarrow \quad -y \;\geq\; 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \;\leq\; -1$$

A_3 stellt also eine Halbebene dar.

27 Benutze Formel (15) aus 30.3 für $z = x + iy$:

$$\operatorname{Arg}\,(x + iy) \;=\; \operatorname{sign} y \,\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \text{mit} \quad \operatorname{sign} y \;:=\; \begin{cases} 1 & , \; y \geq 0 \\ -1 & , \; y < 0 \end{cases}$$

Dann ist $z = rE(\varphi)$ mit $r = |z|$ und $\varphi = \operatorname{Arg}(z)$, also:

a) $1 - i\sqrt{3} = 2E\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

b) $-1 + i = \sqrt{2}E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $-\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}E\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Bemerkung: $\operatorname{Arg}(x + iy)$ läßt sich auch mit Hilfe des Arcus-Tangens berechnen, was allerdings eine Fallunterscheidung erfordert, siehe [A1], 27.5 b).

28 a) Nach Satz 30.7 gibt es genau 6 verschiedene Lösungen der Gleichung. Es ist

$$z^6 \;=\; 1 + i \;=\; \sqrt{2}\,E\left(\tfrac{\pi}{4}\right)$$

und somit:

$$z_k \;=\; \sqrt[12]{2}\,E\left(\tfrac{\pi}{24} + \tfrac{k\pi}{3}\right) \quad \text{für } k = 0, \ldots, 5$$

b) **1. Möglichkeit:**

Eine Lösung der Gleichung ist $z_1 = -6$, ein Teiler des konstanten Summanden 12. Polynomdivision liefert:

$$(z^3 - 34z + 12) : (z + 6) \;=\; z^2 - 6z + 2$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z^2 - 6z + 2 \;=\; 0$$

sind $z_{2,3} = 3 \pm \sqrt{7}$.

2. Möglichkeit:

Substituiere wie in 30.12 d) $z = v + \frac{34}{3v}$. Dann erfüllt $u := v^3$ die quadratische Gleichung

$$27u^2 + 27 \cdot 12u + 34^3 \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad u^2 + 12u + \frac{34^3}{27} \;=\; 0$$

mit Lösungen

$$u \;=\; -6 \pm \sqrt{36 - \frac{34^3}{27}} \;=\; -6 \pm \frac{74}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\,i\,.$$

Es ist $|u| = \sqrt{\left(\frac{34}{3}\right)^3}$ und somit $|v| = \sqrt{\frac{34}{3}}$. Mit $\operatorname{Arg}(v) = \frac{1}{3}\operatorname{Arg}(u)$ und Formel (15) aus 30.3 ergibt sich:

$$\operatorname{Arg}(v) \;=\; \pm\frac{1}{3}\arccos\left(-6 \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{34}\right)^3}\right) + \varphi \quad \text{mit } \varphi \in \left\{0, \tfrac{2}{3}\pi, \tfrac{4}{3}\pi\right\}$$

Jeweils zwei der sechs Lösungen für v fallen zusammen: Es genügt, die Formel für „+“ statt für „±“ auszurechnen. Rücksubstitution mittels

$$z \;=\; v + \frac{34}{3v} \;=\; v + \frac{|v|^2}{v} \;=\; v + \overline{v} \;=\; 2\operatorname{Re}(v) \;=\; 2 \cdot \sqrt{\frac{34}{3}}\cos(\operatorname{Arg}(v))$$

liefert die Nullstellen $3 + \sqrt{7}$, -6, $3 - \sqrt{7}$ (in dieser Reihenfolge).

c) Setze $y := z^2$. Dann gilt:

$$z^4 - z^2 - 20 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - y - 20 \;=\; 0$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind $y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + 20} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$, und somit ist $z^2 = 5$ oder $z^2 = -4$, d.h. $z = \pm\sqrt{5}$ oder $z = \pm 2i$.

sawo